ÜBER

DIE ROTATION DES MONDES

INAUGURAL-DISSERTATION

DIE MIT GENEHMIGUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN SEKTION DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT ZU LUND ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE SONNABEND DEN 24. MARS 1917 UM 10 UHR V. M. IM AUDITORIUM VI ÖFFENTLICH VERTEIDIGT WERDEN WIRD

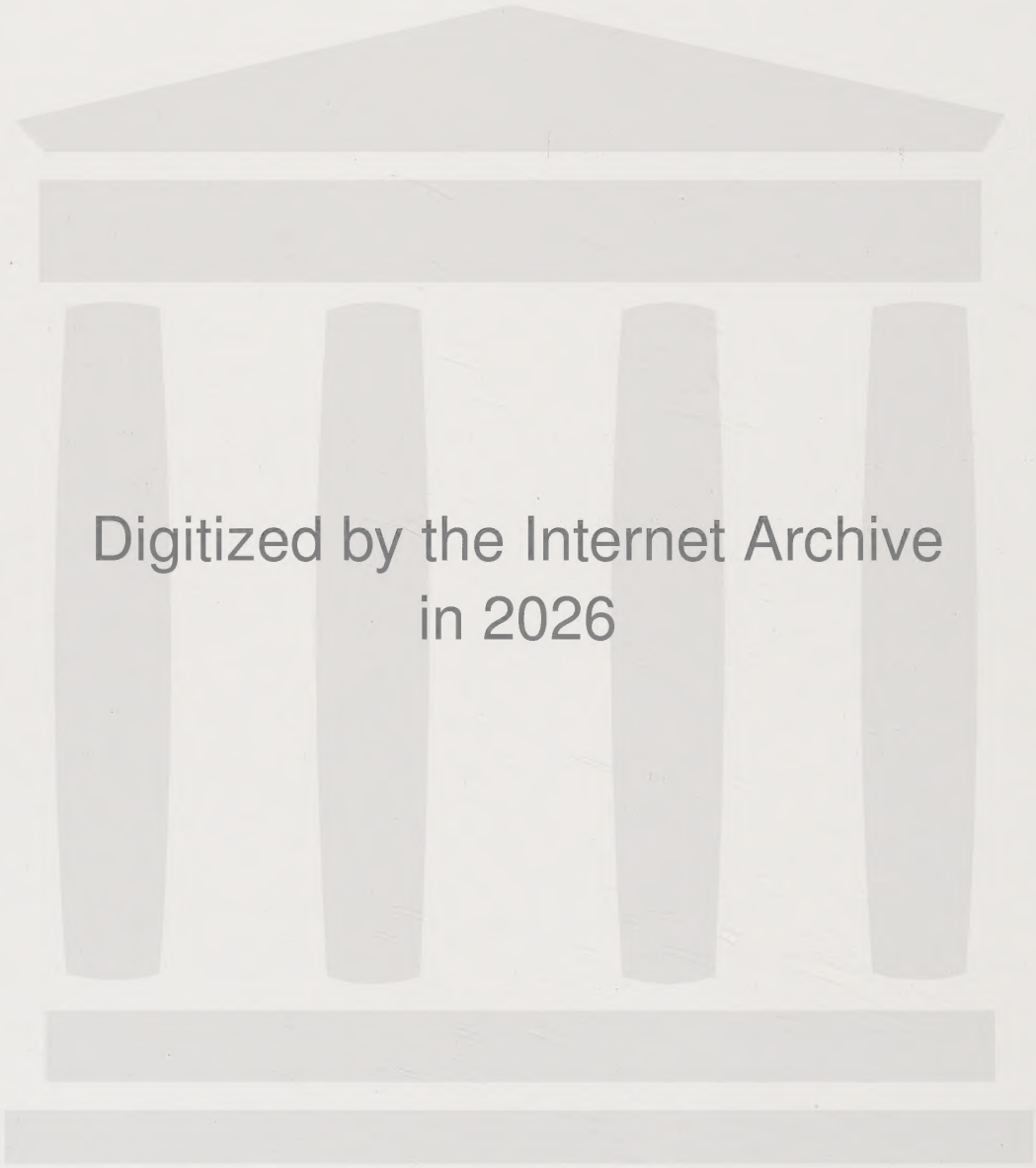
VON

AXEL JÖNSSON

LIC. PHIL., LD.

LUND
C. W. K. GLEERUP

LEIPZIG
OTTO HARRASSOWITZ


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553402_0044

LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT. N. F. Avd. 2. Bd 13. Nr 3.
KUNGL. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS HANDLINGAR. N. F. Bd 28. Nr 3.

ÜBER

DIE ROTATION DES MONDES

VON

AXEL JÖNSSON

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

LUND
C. W. K. GLEERUP

LEIPZIG
OTTO HARRASSOWITZ

Der K. Physiographischen Gesellschaft am 17. jan. 1917 vorgelegt.

LUND 1917
HÅKAN OHLSSONS BUCHDRUCKEREI

I.

Geschichtliches über die Rotation des Mondes.

1. Ausser der Erde ist der Mond der einzige Himmelskörper, dessen Rotationsverhältnisse etwas näher kennen zu lernen bis jetzt möglich gewesen ist. Bekanntlich ist der mittlere Rotationszustand des Mondkörpers durch die CASSINI' schen Gesetze charakterisiert, welche gewissermassen als analog den KEPLER' schen Gesetzen für die Bewegung der Planeten um die Sonne bezeichnet werden können.

Das erste der CASSINI'schen Gesetze stellt die Tatsache fest, dass die Rotationszeit und die Umlaufszeit um die Erde einander gleich sind. Die beiden anderen besagen, dass die Neigung zwischen dem Mondäquator und der Ekliptik konstant ist und dass die Pole des Mondäquators, der Ekliptik und der Mondbahn auf demselben Grosskreis in hier genannter Ordnung liegen.

Diese Gesetze können aber nur annähernd richtig sein, da, von der Erde gesehen, periodische Abweichungen von dem darin ausgesprochenen Bewegungszustand vorkommen müssen und zwar zufolge zweier verschiedener Ursachen, welche teils scheinbare, teils wirkliche Abweichungen hervorbringen. Da der Beobachtungsort der Bewegung der Erde um ihre Achse folgt, erhält man ja eine parallaktische Schwankung und andere scheinbare periodische Bewegungen der Mondflecke entstehen zufolge der Ungleichheiten in der Mondbewegung um die Erde und der Neigung des Mondäquators gegen die Mondbahn. Indessen folgt aus der im dritten Gesetz ausgesprochenen Bewegung der Drehungsachse, dass die Trägheitsmomente des Mondes um die Hauptachsen nicht gleich sind und hieraus, dass die Drehungsachse auch anderen Bewegungen als der Präzession unterliegen muss. Diese, die im Gegensatz zu der oben erwähnten sog. optischen Libration des Mondes reell sind, nennt man die physische Libration.

Nach diesen Bemerkungen will ich eine Zusammenfassung der Geschichte unserer Kenntnis von den Drehungsverhältnissen des Mondes geben.

2. Nach HOUZEAU [1] wurde der Erscheinung, dass der Mond der Erde stets dieselbe Seite zuwendet, erst im fünften Jahrhundert Aufmerksamheit gewidmet. Das Zusammenfallen der Rotationszeit und der Umlaufzeit des Mondes wird jedoch nicht

[1] Vademecum de l'astronome S. 561.

geradezu behauptet, bevor das Kopernikan'sche Weltsystem in die astronomischen Begriffe Klarheit gebracht hat.

Der erste, der eine Abweichung von der gleichförmigen Drehung beobachtete, war Galilei, der in seinem »Dialogo» vom Jahre 1632 berichtet, dass er eine Variation der Lage zweier Mondflecke gefunden habe, die bezüglich ihrer Grösse in Relation mit der Höhe des Mondes über dem Horizont stände. Diese sogenannte tägliche oder parallaktische Libration deutete er in richtiger Weise als darauf beruhend, dass der Beobachtungsort an der täglichen Bewegung der Erde teilnimmt. Galilei kannte auch die Libration in Latitud, die auf der Neigung des Mondäquators gegen die Mondbahn beruht; er gab aber keine Erklärung für sie.

Für Hewelius war die Libration in Longitud bekannt, er erklärte sie aber nicht richtig, da er gerade wie Ricciolus annahm, sie beruhe darauf, dass der Mond immer dieselbe Seite dem Mittelpunkt der Mondbahn zuwende. Ricciolus musste annehmen, die Mondbahn sei ein exzentrischer Kreis, um die Libration in Longitud mit der von ihm gegebenen Erklärung in Einklang zu bringen, da nur die Hälfte ihres Betrages sich erklären liesse, wenn die Mondbahn eine Ellipse wäre.

Eine Zusammenfassung der diesen ersten Betrachtungen zu Grunde liegenden Beobachtungen über die scheinbare Mondlibration findet man in Ricciolus' »Astronomiae refonnatæ» vom Jahre 1665.

Newton war der erste [1], der eine richtige Erklärung dieser beobachteten Schwankungen gab, indem er sie als rein optische erklärte und zeigte, dass sie ihre Ursache in den Ungleichheiten der translatorischen Bewegung des Mondes und der gleichförmigen Drehung um die Achse haben. Auch gab er eine richtige Erklärung für die Libration in Latitud; er glaubte aber, die Drehungsachse stehe senkrecht auf der Ekliptik. In seinen Betrachtungen über die Figur des Mondes kam er auch zum ersten Male dazu, von einer reellen oder physischen Libration zu sprechen.

Der Zeitgenosse Newton's, J. D. Cassini, fasste nun seine und die früheren Beobachtungen in den drei wichtigen Gesetzen zusammmen. Es scheint aber, als ob Kepler das Zusammenfallen der Knoten des Mondäquators und der Mondbahn gekannt hätte, da er in seinem »Traum» darüber Andeutungen macht [2] wie auch über die Neigung zwischen dem Mondäquator und der Ekliptik. Cassini hat indessen den Betrag dieser Neigung bestimmt, der nach seiner Berechnung $2^0\ 30'$ betrug, und die Tatsache ausgesprochen, dass die Ekliptik zwischen den beiden anderen Ebenen liegt, ein für die Theorie der Mondrotation ziemlich wichtiges Verhältnis.

Er publizierte seine Gesetze im Jahre 1693, ohne aber eine einzige Beobachtung zu ihrer Stütze anzuführen, was auch sein Sohn unterliess, als er die Entdeckung seines Vaters beschrieb [3].

Um die Schlüsse Cassini's zu bestätigen, unternahm Tobias Mayer in den Jahren 1748 und 1749 eine längere Reihe von Beobachtungen verschiedener Flecke

[1] Phil. Nat. Lib. III. Prop. 17.

[2] Siehe Delambre: Hist. de l'atsronomie moderne, Tome II S. 733.

[3] Hist. de l'académie royale de sc. 1721.

und erhielt ein Resultat, das mit den CASSINI'schen Gesetzen statsächlich übereinstimmte; er fand aber einen Wert der Inklination des Mondäquators, der um einen Grad kleiner war als der CASSINI's.

Auch LALANDE fand einige Jahre später eine Bestätigung desselben Resultats und bestimmte die Neigung der Drehungsachse gegen die Ekliptik.

3. Es war nun die Aufgabe der theoretischen Astronomie, den Grund dieser interessanten und eigentümlichen Rotationsverhältnisse zu untersuchen.

D'ALEMBERT war der erste, der das theoretische Problem angriff, indem er seine Formel für die Drehung eines Planeten in derselben Weise anwandte, wie er die theoretische Seite der Erdrotation dargelegt hatte. Sein Resultat war aber nicht einmal annähernd richtig, weil er die Gleichheit zwischen der Rotations- und der Revolutionszeit nicht in Berechnung gezogen hatte.

Gleich einigen anderen wichtigen astronomischen Problemen wurde die erste befriedigende Lösung als Preisschrift der französischen Akademie eingesandt. Diese setzte nämlich ihren Preis für das Jahr 1764 auf eine Erklärung der CASSINI'schen Gesetze und er wurde LAGRANGE für seine berühmte Abhandlung zuerkannt, in der er eine Erklärung der Gleichheit zwischen Rotations- und Revolutionszeit gab, aber ohne das Zusammenfallen der Knoten zu erklären. Er ergänzte später[1] seine Theorie und gab eine theoretische Auseinandersetzung der im zweiten und dritten Gesetze ausgesprochenen Rotationsverhältnisse, die nichts zu wünschen übrig liess.

Kurz nachher trug LAPLACE mit seinen Untersuchungen dazu bei, hierein Klarheit zu bringen, indem er auf einfachere Weise die LAGRANGE'schen Resultate wiederfand und die Einwirkung der sekulären Störungen der Ekliptik untersuchte, welche möglicherweise die Geltung der CASSINI'schen Gesetze aufheben konnten. Er fand indessen, dass die Attraktion der Erde ausreichend ist, um das Zusammenfallen der Knoten auch auf der beweglichen Ekliptik beizubehalten, und weiter fand er, dass die Rotationsgeschwindigkeit denselben sekulären Änderungen wie die Revolution des Mondes unterworfen ist, und dank dieser späteren Tatsache hat dei sekuläre Akzeleration in der mittleren Bewegung niemals zur Folge, dass der Mond je die andere Seite der Erde zuwendet. Er wies auch nach, dass die Rotationszeit und die Umlaufzeit von Anfang an nicht notwendiger Weise gleich waren, was auch nur unendlich wenig Wahrscheinlichkeit für sich zu haben schien.

POISSON machte einige Zusätze zu den früher gefundenen Resultaten und fand neue Glieder von langer Periode in den Ausdrücken der Neigung und des Knotens des Mondäquators durch Berücksichtigung einiger Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Elemente der Mondbahn.

4. Das hier vorliegende mechanische Problem führt zu einem System von linearen Differentialgleichungen, deren Integrale die Drehungsgeschwindigkeit und die Lage des Mondäquators zum Ausdrucke bringen; sie sind also additiv aus zwei Teilen zusammengesetzt, aus der sogenannten freien oder willkürlichen Libration und

[1] Memoires de l'académie de Berlin 1780.

der erzwungenen. Jene besteht aus Schwankungen, in denen die Amplitüden und die Phasen als Integrationskonstanten auftreten, während die Schwingungsdauer auf den Trägheitsmomenten des Mondes beruht. Die erzwungene Libration dagegen besteht aus Schwingungen, die von den Ungleichheiten in der Mondbahn herrühren und daher diese gewissermassen wiederspiegeln. Die Periode und die Phasen dieser Schwingungen hängen von der Mondbahn ab, während die Amplitüden ausserdem auf der Figur des Mondes oder richtiger auf den Quotienten der Trägheitsmomente um die Hauptachsen beruhen. Das Studium der physischen Libration gibt uns also ein Mittel an die Hand, diese Grössen zu bestimmen. Es war daher von grossem Interesse, den Betrag der physischen Libration aus den Beobachtungen zu bestimmen, um die in die Theorie eingehenden Konstanten zu ermitteln, die ja mit der Frage der Entwicklung und des inneren Baues des Mondes in Zusammenhang stehen.

Im Anfang des neunzehnten Jahrhunderts hatte die beobachtende Astronomie einen so hohen Standpunkt erreicht, dass man Aussicht hatte, diese Ungleichheiten zu finden. Auf den Vorschlag Laplace's führten Bouvard und Arago in den Jahren 1806—1810 eine Reihe von Beobachtungen aus, indem sie zu verschiedenen Zeiten die Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen zwischen einem Fleck und Punkten auf dem Rand der Mondscheibe bestimmten. Dieses Beobachtungsmaterial wurde zusammen mit einigen eigenen Beobachtungen von Nicollet [1] auf eine verdienstvolle Weise bearbeitet, indem er hieraus die Neigung des Mondäquators und die grösste Ungleichheit in der Libration in Longitud, die der jährlichen Gleichung in der Longitud des Mondes entspricht, bestimmte. Unter Vernachlässigung der willkürlichen Libration berechnete er dann nach den aus der Theorie ergebenen Formeln die Verhältnisse zwischen den Trägheitsmomenten und die Neigung, aber, wie er selbst bemerkte, war seinen Resultaten nicht sehr zu trauen, da die Beobachtungen nicht die erforderliche Genauigkeit hatten.

Kreil und Stambuchi publizierten 1837 Bestimmungen von denselben Grössen nach derselben Beobachtungsmethode.

Im Jahre 1839 nahm Bessel die Frage auf, den Betrag der physischen Libration des Mondes aus den Beobachtungen zu bestimmen. In den »Astronomischen Nachrichten» Nr. 376 und 377 gibt er die Anweisungen, nach denen man aus Heliometerbeobachtungen der Abstände zwischen einem Punkt auf der Mondscheibe und Punkten auf dem Rand die Abweichungen der Bewegung des Mondes von den Cassini'schen Gesetzen und dann aus diesen wieder die in die Theorie eingehenden Konstanten berechnen könne. Sein Schüler Schlüter führte sodann in Königsberg in etwa $2\,^1/_2$ Jahren genaue Beobachtungen des Kraters Mösting A aus und diese wurden von Wichmann [2] fortgesetzt, welcher auch die Laplace'sche Theorie ausführlich weiter entwickelte zu einer Form, in der sie direkt auf das Beobachtungsmaterial angewandt werden konnte. Aus dem Resultat seiner Beobachtungen ging hervor, dass die Koeffizienten der Glieder in den Ausdrücken der phy-

[1] Connaissance des Temps 1822—1823.

[2] Astronomische Nachrichten Nr. 619, 621, 628, 630, 631.

sischen Libration sehr klein sind, so dass ihre Wirkung von der Erde gesehen zwei oder drei Bogensekunden nicht übersteigen kann. Die Schwierigkeit im Probleme fand er zum grossen Teil in den Abweichungen des Mondrands von der Kreisform und weiter wies er darauf hin, dass die Koeffizienten zur Neigung und zu den Amplitüden der arbiträren Libration in den Willkürgleichungen, die man bei der Bestimmung der Rotationselemente erhält, einander nahe proportionell sind, weshalb man sie schwerlich von einander trennen kann.

Die Beobachtungen von Schlüter wurden von Franz im 38. Band der »Königsberger Beobachtungen» bearbeitet.

Unter den Astronomen, die die Rotationselemente des Mondes zu bestimmen gesucht, haben ist auch Hartwig zu erwähnen[1], der Heliometerbeobachtungen und Rechnungen nach Wichmanns Methode ausgeführt hat. Seine Beobachtungen wurden später aufs neue von Franz in den »Astronomischen Nachrichten» Nr. 2761 bearbeitet. Weiter hat Pritchard[2] Bestimmungen auf photographische Weise gemacht.

Sehr vollständige Untersuchungen über diesen Gegenstand sind indessen von Hayn in drei Abhandlungen mit dem Titel »Selenographische Koordinaten» veröffentlicht worden[3]. In der ersten Abhandlung hat er eine theoretische Berechnung der Euler'schen Winkel für den Mond angestellt und versucht dabei alle Glieder zu berücksichtigen, die eine selenozentrische Amplitüde von mehr als 2″ haben. Bei dieser Berechnung, in welcher er sich der von Laplace gegebenen Methode bedient und welche die genaueste Berechnung der Mondlibration darstellt, die bis jetzt ausgeführt worden ist, weist er einige vorher vernachlässigte Grössen auf, die eine gewisse Rolle spielen. Für die Koordinaten des Mondes verwendet er die von Hansen gegebenen Ausdrücke. Die direkte Einwirkung der Sonne auf die Rotation wird auch untersucht und er findet, dass man sie ausser Acht lassen kann.

In der zweiten Abhandlung publiziert er Beobachtungen, die von ihm in den Jahren 1898—1901 in Leipzig ausgeführt worden sind. Er bestimmt die Lage von Mösting A und von vier anderen Mondflecken in der Nähe des Mondrands und macht dann Bestimmungen der Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen zwischen Mösting A und den anderen Punkten wie auch zwischen jenen und dem Mondrand. Aus dem von Franz gefundenen Werte der Neigung des Mondäquators und aus angenäherten Werten der selenozentrischen Koordinaten der fünf Punkte berechnet er dann die Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen zwischen diesen fünf Punkten untereinander, dabei von der physischen Libration abstrahierend. Aus dem Unterschied zwischen der gefundenen und der so berechneten Lage erhält er mittelst Differentialformeln Verbesserungen der Werte der genäherten Grössen, die er benutzt, und ähnlich wie Wichmann und Franz hat er dadurch, dass er die

[1] Strassburger Inaugural-Dissertation 1881.

[2] Montly Notice Bd 41.

[3] Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Bd. 27, 29, 30.

physische Libration als Differentiale der Euler'schen Winkel betrachtet, eine Möglichkeit, die Librationskonstanten zu bestimmen.

Seine Behandlungsweise weicht von der Wichmanns und Franz' darin ab, dass er in die Bedingungsgleichungen eine Korrektion des Mondradius der fünf Punkte eingehen lässt. Er findet dabei, dass z. B. Mösting A zwei bis drei Bogensekunden weiter vom Mondzentrum liegt, als der aus den Sternbedeckungen erhaltene Wert des Mondradius zeigt. Durch diese Behandlungsweise erhielt er einen Wert der Verhältnisse der Trägheitsmomente für die im Äquator liegenden Hauptachsen, der von dem der früheren Forscher bedeutend abweicht [1]. Er bemerkt, dass man zu genaueren Werten kommen würde, wenn man im Stande wäre, die wichtigsten systematischen Fehler zu eleminieren, besonders diejenigen, die auf Grund der Abweichung des Mondrands von der Kreisform entstehen. In der dritten Abhandlung diskutiert er Hartwigs Beobachtungen und die Einflüsse der Randfehler, für welche er eine Korrektionstabelle gibt. Als Schlussresultat erhält er für die Neigung den Betrag $1^0\,32'\,6''$.

Der Wert der Neigung scheint ziemlich genau zu sein, und wenn auch die Werte der Verhältnisse der Trägheitsmomente von den früher gefundenen sehr abweichen und schwer zu bestimmen sind, betrachtet er sie als ziemlich sicher, da sie mit denen von Hansen aus der Perihel- und Knotenbewegung übereinstimmen, obwohl dies Resultat Hansens bestritten worden ist.

Um den Widerspruch zwischen den Berechnungen von Franz und Hayn auszugleichen, hat Stratton [2] eine Neureduktion der Schlüter'schen Beobachtungen unternommen, in der er die von Franz vernachlässigte Korrektion des Mondradius mit in Betracht gezogen hat. Das Ergebnis bestätigt aber eher die Werte von Franz als die von Hayn, wogegen Michailowski [3] Werte der fraglichen Grössen, die am nächsten mit denen von Hayn zusammenfallen, angibt.

Die letzte Untersuchung über diesen Gegenstand, die von Puiseux ausgeführt worden ist, weicht aber sehr von dieser früheren ab. Aus 40 photographischen Aufnahmen, die in einem Zeitraum von fünfzehn Jahren gemacht worden sind, sucht er die physische Libration zu ermitteln. In »Comptes rendus de l'acad. d. sc.», tome 163 s. 341, gibt er ein Resumé des ganz unerwarteten Resultates. Für den Koeffizienten der grössten Ungleichheit in Longitud, jenen mit der Sonnenlänge als Argument, erhält er den Wert $19'{,}10$, während Hayn einen etwa zwanzig Mal kleineren Wert hat. Eine viel grössere Abplattung des Mondäquators als die früher gefundene würde sich hieraus ergeben.

Ausserdem treten einige andere nicht vorher aus der Theorie hervorgehobene Schwankungen sowohl in Longitud wie in Latitud auf. Es scheint ihm daher, als ob die Annahme, dass der Mond wie ein fester Körper rotiere, nicht genügte, um die Ungleichheiten in der Drehung zu erklären, sondern dass man die mög-

[1] Siehe S. 35.

[2] Mem. of the Royal astr. society vol. 59. Part 4.

[3] Kasan Mitt. 17.

lichen Variationen seiner Form berücksichtigen müsse, welche in der physischen Libration Glieder bewirken, die mit den von einem festen Mondkörper herrührenden Gliedern vergleichbar sind. Er betrachtet es als wahrscheinlich, dass eine innere Flüssigkeit im Mond Geseitenwirkungen auf Grund der Attraktion der Erde unterliege und dadurch zu Ungleichheiten in der Drehung Anlass gebe.

Die Resultate von Puiseux weichen indessen so viel von denen der früheren Forscher über denselben Gegenstand ab, dass man wohl Ursache hat, sie mit einer gewissen Vorsicht aufzunehmen, obwohl für ihre Zuverlässigkeit ja der Umstand spricht, dass seine Beobachtungen sich über einen viel grösseren Zeitraum erstrecken als die von Hayn und Schlüter und von gewissen aus den Unebenheiten der Mondfläche herrührenden Fehlern nicht beeinflusst sein sollen.

Im folgenden gebe ich eine Zusammenstellung über die aus den Berechnungen verschiedener Forscher hervorgehenden Werte für die Koeffizienten der jährlichen Ungleichheit in der Libration in Longitud, die ja das grösste Glied ist.

Nicollet	4′ 49″, 7
Kreil und Stambuchi	5′ 42″, 6
Hartwig	3′ 27″
Pritchard	5′ 30″
Franz	2′ 13″, 3
Hayn	59″
Stratton	2′ 9″
Puiseux	19′ 6″

Es scheint also, als ob die Aufgabe, aus Beobachtungen die physische Libration des Mondes zu bestimmen, ihre endgültige Behandlung noch nicht erhalten hätte sondern man kann vielmehr immer noch mit Hansen behaupten, dass in dem fraglichen Problem etwas Verborgenes zu liegen scheint. Es dürfte für künftige Forscher ein reiches Feld sein, die vielen von der Theorie angedeuteten kleinen Schwankungen mit genaueren Beobachtungsmethoden zu entdecken zu suchen.

5. Der von Laplace gegebenen Behandlung der Theorie der Mondrotation folgen im grossen und ganzen Wichmann, Franz und Hayn, wobei sie von den Euler'schen Gleichungen für die Drehung eines festen Körpers um einen fixen Punkt ausgehen und durch Approximation diese integrieren.

Man kann indessen dem Rotationsproblem eine mit dem Dreikörperproblem analoge Behandlung zuteil werden lassen, indem man die Methode der Variation der Konstanten einführt, was schon Poisson 1808 nachwies. Jacobi bemerkte auch, dass die Gleichungen für die Rotation in kanonischer Form dargestellt werden können. Es ist deutlich, dass es ein grosser Vorteil wäre, diese beiden Grundprobleme der himmlischen Mechanik in analoger Weise behandeln und beim Rotationsproblem Nutzen aus den vielen tiefgehenden Untersuchungen über das Dreikörperproblem ziehen zu können. In den »Meddelanden från Lunds observatorium» hat

Charlier gezeigt, wie man in geeigneter Weise gewisse dabei auftretende Schwierigkeiten vermeidet. Als »intermediäre Bahn» wird die Rotation eines festen kugelförmigen Körpers betrachtet. Die bei der Integration derselben auftretenden sechs Integrationskonstanten werden dann als Veränderliche angewandt und die Abweichungen von der Kugelform und die äusseren Kräfte werden dabei berücksichtigt. Zusammen mit Zinner hat er die in der Rotationstheorie auftretende Störungsfunktion in geeignete Veränderliche entwickelt.

In »Meddelande Nr. 32» hat er gezeigt, dass gewisse partikuläre Integrale zum planetarischen Rotationsproblem existieren, welche bei einer Untersuchung der Rotation des Mondes zweckmässig als Ausgangslösungen zu benutzen sind. Durch das Aufstellen der diesen partikulären Lösungen entsprechenden Variationsgleichungen erhält man eine grosse Übersichtlichkeit bei der Behandlung des Problems, die den früheren Methoden fehlt. Zwar erhält man in beiden Fällen Differentialgleichungen derselben Form und man muss sich mit einem annähernden Integrationsverfahren begnügen, aber das Einführen der Störungsfunktion ermöglicht in leichter Weise, die Einwirkung vernachlässigter Grössen zu beurteilen. Man kann auch mit Hilfe dieser Methode zu gewissen Gemeintheoremen über die Stabilitätsverhältnisse kommen, was sich aus dem folgenden ergeben wird.

In der vorliegenden Arbeit habe ich mittels dieser Methode die Drehung des Mondes unter Annahme eines festen Mondkörpers im Einzelnen untersucht und die Behandlung rechnerisch durchgeführt. Einige neue Glieder von merkbarem Einfluss habe ich dabei nicht gefunden, sondern meine Rechnungen haben in der Hauptsache zu denselben Resultaten wie die von Hayn geführt.

Obgleich das fragliche Probem also schon eine numerisch erschöpfende Behandlung erhalten hat, ist es ja doch wohl interessant, mit dieser Methode die Ungleichheiten in der Drehungsbewegung wiederzufinden und zu kontrollieren und sie mehr vom störungstheoretischen Gesichtspunkte aus zu betrachten.

Im letzten Kapitel habe ich dann die charakteristische Funktion aufgeschrieben, die bei der Behandlung der Rotation eines Körpers von veränderlicher Form nach dieser Methode auftritt.

II.

Herleitung der Differentialgleichungen für die Rotation des Mondes.

6. Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die Drehung eines Himmelskörpers um seinen Schwerpunkt in kanonischer Form ist CHARLIER [1] folgenderweise zu Werke gegangen.

Man hat ein im Raume festes Koordinatensystem und ein anderes, das im Körper fest liegt und dessen Achsen wir mit den Hauptachsen des Körpers zusammenfallen lassen. Der Anfangspunkt der beiden Achsensysteme ist der Schwerpunkt des Körpers und die Koordinaten eines Massenelements in Bezug auf die im Raume festliegenden Achsen nennen wir X, Y, Z, und mit Beziehung auf das mit dem Körper festverbundne System bezeichnen wir die Koordinaten mit x, y, z. Die Trägheitsmomente des Körpers um diese Achsen nennen wir bez. A, B und C. Die Lage der beiden Systeme zu einander ist von den EULER'schen Winkeln θ, ψ und φ bestimmt und ihre Definition ist die folgende, wie aus untenstehender Figur erhellt.

θ die Neigung der xy-Ebene gegen die XY-Ebene,

ψ die Länge des absteigenden Knotens der xy-Ebene mit umgestauschtem Zeichen,

φ der Winkel zwischen der positiven x-Achse und demselben Knoten der xy-Ebene.

Man hat, wenn die Rotationskomponenten um die Hauptachsen ω_1, ω_2, und ω_3 genannt werden,

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} \\
\omega_2 &= \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi \frac{d\theta}{dt} \qquad (1) \\
\omega_3 &= - \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}
\end{aligned}
$$

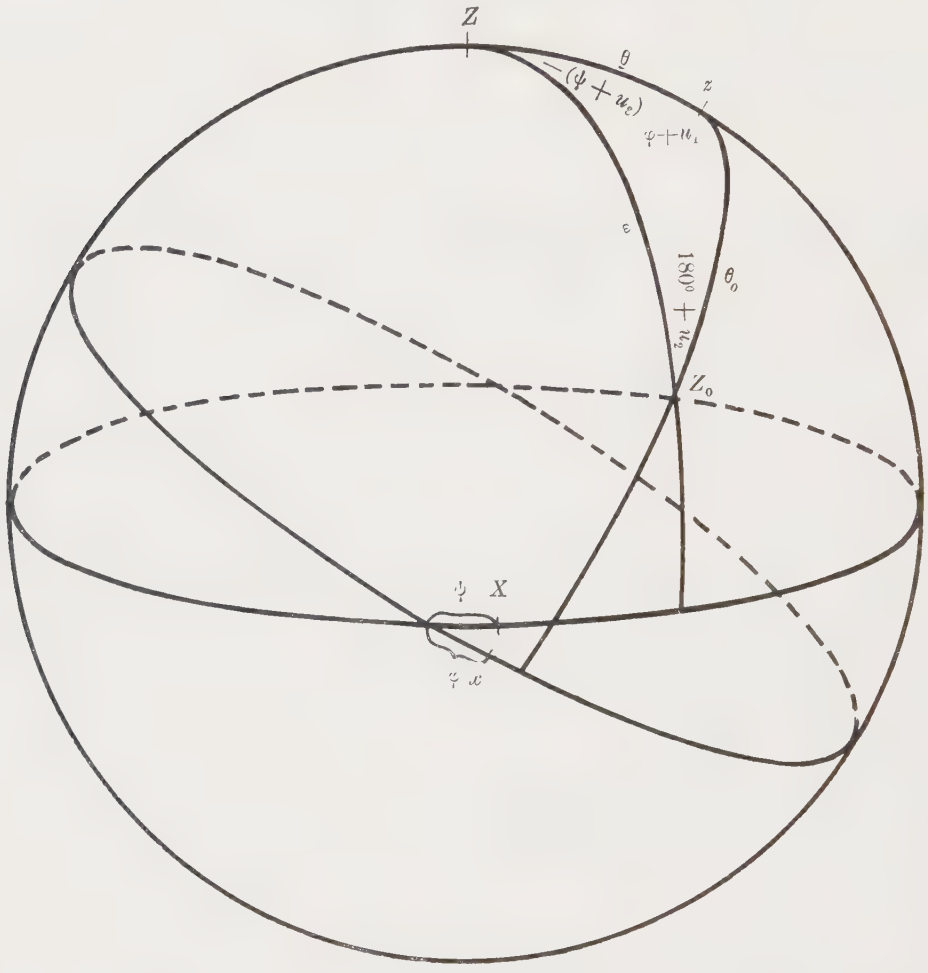
[1] Vgl. Meddelande från Lunds Observatorium N:r 31.

und für die lebendige Kraft des rotierenden Körpers hat man den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2} A\omega_1^{\,2} + \tfrac{1}{2} B\omega_2^{\,2} + \tfrac{1}{2} C\omega_3^{\,2}.$$

Wir nehmen nun die Euler'schen Winkel als q-Koordinaten, dadurch dass wir

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \psi$$



setzen, und drücken die lebendige Kraft in diesen Grössen und in p_i aus, wenn

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Wenn

$$k_1 = \frac{C - A}{A}$$

$$k_2 = \frac{C - B}{B}$$

gesetzt wird und

$$T = T_0 + k_1 T_1 + k_2 T_2,$$

so ist

$$2CT_0 = \frac{p_1^2 + p_3^2 + 2p_1p_3\cos\theta}{\sin^2\theta} + p_2^2$$

$$2CT_1 = \left[(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - p_2\cos\varphi\right]^2$$

$$2CT_2 = \left[(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + p_2\sin\varphi\right]^2.$$

Für die Potentialfunktion U hat man, wenn nur ein störender Körper vorhanden ist, folgenden Ausdruck

$$U = \frac{3\mu}{2r^3}\left[Ak_1\cos^2\alpha + Bk_2\cos^2\beta\right],$$

in dem α und β die Winkel sind, die der Radius Vektor des störenden Körpers, der mit r bezeichnet wird, mit den Hauptachsen A und B bildet, und μ seine Masse.

Wenn wir die Funktion

$$H = T - U$$

einführen und diese in den Grössen p_i und q_i ausgedrückt wird, so sind die Differentialgleichungen für die Bewegung um den Schwerpunkt

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

7. Um die in diesen Gleichungen definierte Bewegung zu untersuchen, gehen wir in derselben Weise ans Werk wie im Dreikörperproblem, indem wir in H von gewissen Gliedern absehen und die Gleichungen unter dieser Vereinfachung integrieren, wobei wir die der intermediären Bahn im Dreikörperproblem entsprechende Bewegungsform erhalten. Wenn man als solche die Rotation eines kugelförmigen Körpers betrachtet, wobei

$$k_1 = k_2 = 0$$

und U also verschwindet, ergibt sich

$$H = \frac{p_1^2 + p_3^2 + 2p_1p_3\cos\theta}{2C\sin^2\theta} + \frac{p_2^2}{2C}.$$

Mit diesem Ausdruck der charakteristischen Funktion hat Charlier die Gleichungen (2) integriert und die mechanische Bedeutung der dabei auftretenden Integrationskonstanten in ausführlicher Weise dargelegt, wobei er gefunden hat, dass

$$q_1 = \varphi = \beta_1 + \int \frac{(\alpha_1 + \alpha_3\cos\theta)\,d\theta}{\sin\theta\,\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta - \alpha_2^2\cos^2\theta}}$$

$$q_3 = \psi = \beta_3 = \int \frac{(\alpha_1 + \alpha_1\cos\theta)\,d\theta}{\sin\theta\,\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta - \alpha_2^2\cos^2\theta}}$$

und θ als Funktion der Zeit aus

$$\int \frac{\alpha_2 \sin\theta d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3\cos\theta - \alpha_2^2\cos^2\theta}} = \frac{\alpha_1}{C}t + \beta_2,$$

wo α_1, α_2, α_3; β_1, β_2 und β Integrationskonstanten sind. Man kann

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \cos\theta_0 \text{ und } \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\cos\varepsilon$$

setzen, wo θ_0 und ε reelle Winkel sind, und wenn

$$u_1 = -\beta_1$$
$$u_2 = -\left(\frac{\alpha_2}{C}t + \beta_2\right)$$
$$u_3 = -\beta_3,$$

so erhält man folgende Ausdrücke der Euler'schen Winkel als Funktionen der Zeit.

$$\cos\theta = \cos\theta_0\cos\varepsilon - \sin\theta_0\sin\varepsilon\cos u_2$$
$$\psi + u_1 = -\int \frac{\alpha_1 + \alpha_3\cos\theta}{\sin^2\theta}\,du_2$$
$$\psi + u_2 = -\int \frac{\alpha_3 + \alpha_1\cos\theta}{\sin^2\theta}\,du_2.$$

Um die geometrische Bedeutung der Konstanten anschaulich zu machen, wird die sogenannte Zentralachse der Rotation eingeführt, die mit der Z-Achse und der z-achse die Winkel ε und θ_0 bildet. In der Figur ist sie mit $O\,Z_0$ bezeichnet. Die geometrische Bedeutung von u_1 u_2 und u_3 geht aus den Bezeichungen der Winkel in dem von den Schneidepunkten der Z-, z- und Zentralachse mit der Einheitssphäre gebildeten Dreieck hervor.

Diese sechs Integrationskonstanten entsprechen deutlich im Dreikörperproblem den Delannay'schen Elementen einer Planetenbahn.

Die Grössen α_1, u_1, α_3, u_1 bestimmen die Lage der Zentralachse im Körper und im Raume, während $-\frac{\alpha_2}{C}$ die Rotationsgeschwindigkeit des Körpers um die Zentralachse repräsentiert. In dem hier durchgeführten Falle der Drehung einer festen Kugel nimmt die Zentralachse eine unveränderliche Lage im Körper wie im Raume ein, da u_1, u_3, ε und θ_0 Konstanten sind.

Wenn $\varepsilon > \theta_0$, wie im Mondproblem das Verhältnis ist, kann man die folgenden Reihenentwickelungen für φ und ψ erhalten, worin der Akzent andeutet, dass das $s = 0$ entsprechende Glied ausgeschlossen werden soll.

$$\varphi + u_1 = -u_2 + \Sigma'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_1^s \sin s u_2 + \Sigma'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_2^s \sin s u_2$$

$$\psi + u_3 = -\Sigma'(-1)^{s+1}\frac{1}{s}\varkappa_1^s \sin s u_2 + \Sigma'(-1)^s\frac{1}{s}\varkappa_2^s \sin s u_2,$$

wo

$$\varkappa_1 = \frac{1 - \nu_1}{1 + \nu_1}, \qquad \varkappa_2 = \frac{1 - \nu_2}{1 + \nu_2}$$

und

$$\nu_1 = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \theta_0)}{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \theta_0)}, \qquad \nu_2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \theta_0)}{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \theta_0)}.$$

Wird nur die erste Potenz von θ_0 berücksichtigt, was im Mondproblem erlaubt ist, da θ_0 sehr klein ist, so folgen die genäherten Formeln

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varphi &= -u_1 - u_2 + \frac{\theta_0 \sin u_2}{tg\varepsilon} \\ \psi &= -u_3 + \frac{\theta_0 \sin u_2}{\sin \varepsilon} \\ \theta &= \varepsilon + \theta_0 \cos u_2 . \end{aligned}$$

Nachdem nun die Integration der »intermediären Bahn» in der hier skizzierten Weise durchgeführt ist, kann man die Bewegungsgleichungen eines beliebigen festen Körpers aufstellen und dabei auch den Einfluss der störenden Kräfte berücksichtigen, indem man die charakteristische Funktion in α_i und u_i ausdrückt anstatt in p_i und q_i; und dann sind Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}, \qquad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

8. Es empfiehlt sich indessen, wie es sich bei der Entwickelung der Störungsfunktion ergibt, ein paar Variabelvertauschungen auszuführen, indem wir zunächst

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_2 & \eta_1 &= u_1 + u_2 - u_2 + \lambda \\ \xi_2 &= \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2 (1 - \cos \theta_0) & \eta_2 &= -u_1 \\ \xi_3 &= \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 (1 - \cos \varepsilon) & \eta_3 &= u_3 - \lambda, \end{aligned}$$

setzen wo λ die Länge des störenden Körpers in Bezug auf das feste System bedeutet. Damit diese neuen Veränderlichen kanonisch seien, muss man die Grösse $\alpha_3 \frac{d\lambda}{dt}$ zur charakteristischen Funktion addieren [1]. Im Mondproblem, wo die Winkel ε und θ_0 klein sind, ist es aus denselben Gründen, die das Einführen der Poincaré'schen Veränderlichen in die planetarische Störungstheorie veranlassen, vorteilhaft, durch die folgenden Gleichungen ξ_2, η_2, ξ_3 und η_3 gegen u, v, p und q auszutauschen, welche neue Veränderlichen auch kanonisch sind

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2\xi_2} \cos \eta_2, & p &= \sqrt{2\xi_3} \cos \eta_3 \\ v &= \sqrt{2\xi_2} \sin \eta_2, & q &= \sqrt{2\xi_2} \sin \eta_3. \end{aligned}$$

[1] Siehe Meddelande N:r 33.

In diesen Grössen haben CHARLIER und ZINNER[1] die Ausdrücke für $\cos^2\alpha$ und $\cos^2\beta$ als Potenzreihen in u, v, p und q mit den Koeffizienten als Funktionen von ξ_1 und η_1 und den Koordinaten des störenden Körpers gegeben.

Bei der Anwendung dieser Variabeln, um die Rotationsverhältnisse des Mondes zu untersuchen, ist es vorteilhaft, noch einen Variabelumtausch auszuführen, der die Integration in wesentlichem Grad erleichtet, indem p und q gegen andere Veränderliche ausgetauscht werden.

In H geht das Glied

$$\frac{1}{2}(p^2 + q^2)\frac{d\lambda}{dt}$$

ein. Für λ hat man einen Ausdruck der Form

$$nt + c_0 + \Sigma A_i \sin(\alpha_i nt + c_i)$$

wo n die mittlere Bewegung des Mondes repräsentiert, und also, wenn die periodischen Glieder in λ mit λ_1 bezeichnet werden,

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\lambda_1}{dt}.$$

Die periodischen Glieder dieses Ausdrucks erschweren die Integration sehr, weshalb wir sie aus H fortschaffen wollen.

Um diesen Zweck zu erzielen, setzen wir

$$\begin{aligned} p' &= p\cos\lambda_1 - q\sin\lambda_1 = \sqrt{2\xi_3}\cos(\eta_3 + \lambda_1) \\ q' &= p\sin\lambda_1 + q\cos\lambda_1 = \sqrt{2\xi_3}\sin(\eta_3 + \lambda_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Aus einer einfachen Rechnung ergibt sich, dass die Differentialquotienten dieser Grössen nach der Zeit durch folgende Ausdrücke gegeben sind

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q'} - q'\frac{d\lambda_1}{dt} \\ \frac{dq'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p'} + p'\frac{d\lambda_1}{dt} \end{aligned}$$

Es erhellt hieraus, dass, wenn wir die charakteristische Funktion F einführen und

$$F = H - \tfrac{1}{2}(p'^2 + q'^2)\frac{d\lambda_1}{dt}$$

schreiben, p' und q' kanonische Veränderliche sind.

[1] Siehe Meddelande N:r 33.

Unsere Bewegungsgleichungen sind also

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_1}, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_1}$$

5)
$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial u}$$

$$\frac{dp'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q'}, \quad \frac{dq'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p'}.$$

Und hier ist

$$F = T - U - \xi_1 \frac{d\lambda}{dt} + \tfrac{1}{2}(p'^2 + q'^2)\, n,$$

wo

$$T = \frac{\xi_1^{\,2}}{2C} + \frac{k_1}{2C}\left[\xi_1 - \tfrac{1}{4}(u^2+v^2)\right]v^2 + \frac{k_2}{2C}\left[\xi_1 - \tfrac{1}{4}(u^2+v^2)\right]u^2$$

und

$$U = \tfrac{3}{2}\frac{\mu}{r^3}\left[k_1 A \cos^2\alpha + k_2 B \cos^2\beta\right].$$

9. Wenn man den Fall betrachtet, dass der störende Körper sich in einer Ebene in einem Kreis um den rotierenden Körper bewegt, so existieren zu den Gleichungen (5) die partikulären Integrale [1].

$$u = v = p' = q' = 0$$

und

$$\eta_1 = 0 \text{ oder } \pm 90^0.$$

Die mechanische Bedeutung dieser Lösungen ist, dass man mit gebundener Rotation zu tun hat, und die Drehung geschieht um die Achse der Trägheitsmomente C, wobei entweder die kleinste oder die mittlere Trägheitsachse gegen den störenden Körper gerichtet ist. Die letzte dieser Bewegungsformen ist unstabil, während die dem

$$\eta_1 = 0$$

entsprechende Drehung stabil ist.

Von diesen unter den gemachten Voraussetzungen existierenden Integralen zum System (5) wollen wir ausgehen, um die Mondrotation zu behandeln, und dabei von der direkten Einwirkung der Sonne absehen, die ja sehr unbedeutend ist.

In der Störungsfunktion setzen wir also

$$\xi_1 = Cn + \xi, \qquad \eta_1 = \eta$$

und um p' und q' anstatt p und q einzuführen, setzen wir laut (4)

$$p = \quad p' \cos\lambda_1 + q' \sin\lambda_1$$
$$q = -p' \sin\lambda_1 + q' \cos\lambda_1.$$

[1] Siehe Meddelande N:r 32.

Wir erhalten dann, wenn wir in die von Charlier und Zinner gegebene Entwickelung des Potentials obenstehende Ausdrücke für p und q einsetzen und der Übersichtlichkeit halber

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \dots .$$

schreiben, wo F_i eine homogene Funktion des Grades in den Variabeln ξ, η, u, v, p' und q' bezeichnet

$$F_0 = \frac{1}{2} Cn^2 - Cn \frac{d\lambda}{dt} - \frac{3}{2} \frac{\mu}{r^3} k_1 A \cos^2 b$$

$$F_1 = n\xi - \xi \frac{d\lambda}{dt} + \frac{3}{2} \frac{\mu}{r^3} \sin 2b \frac{k_1 A}{\sqrt{Cn}} (p' \sin \lambda_1 - q' \cos \lambda_1 + v)$$

$$F_2 = \frac{\xi^2}{2C} + \frac{1}{2} k_1 n v^2 + \frac{1}{2} k_2 n u^2 + \frac{n}{2} (p'^2 + q'^2) + \frac{3}{2} \frac{\mu}{r^3} \frac{k_1 A}{Cn} \Big| Cn\eta^2 \cos^2 b +$$

$$+ \cos 2b \, (v^2 + p'^2 \sin^2 \lambda_1 + q'^2 \cos^2 \lambda_1 - p'q' \sin 2\lambda_1 + 2p'v \sin \lambda_1 - 2p'v \cos \lambda_1) -$$

$$- \frac{\sin 2b}{2\sqrt{Cn}} (v\xi + p'\xi \sin \lambda_1 - q'\xi \cos \lambda_1 + 2Cnp'\eta \cos \lambda_1 + 2Cnq'\eta \sin \lambda_1) \Big| -$$

$$- \frac{3}{2} \frac{\mu}{r^3} \frac{k_2 B}{Cn} \Big| Cn\eta^2 \cos^2 b + \sin^2 b \, (p'^2 \cos^2 \lambda_1 + q'^2 \sin^2 \lambda_1 + p'q' \sin 2\lambda_1 + u^2 +$$

$$+ 2p'u \cos \lambda_1 + 2\, q'u \sin \lambda_1) - \sqrt{Cn} \sin 2b \, (p'\eta \cos \lambda_1 + q'\eta \sin \lambda_1 + \eta u) \Big| ,$$

wo b die Breite des störenden Körpers über die XY-Ebene bedeutet.

Werden nur diese beiden niedrigsten Potenzen der Variabeln mitgenommen, erhalten unsere zu betrachtenden Bewegungsgleichungen die Form des unten angeführten Systems.

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt} + a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}u + a_{14}v + a_{15}p' + a_{16}q' = l_1 \\
&\frac{d\eta}{dt} + a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}u + a_{24}v + a_{25}p' + a_{26}q' = l_2 \\
&\frac{du}{dt} + a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}u + a_{34}v + a_{35}p' + a_{36}q' = l_3 \\
&\frac{dv}{dt} + a_{41}\xi + a_{42}\eta + a_{43}u + a_{44}v + a_{45}p' + a_{46}q' = l_4 \\
&\frac{dp'}{dt} + a_{51}\xi + a_{52}\eta + a_{53}u + a_{54}v + a_{55}p' + a_{56}q' = l_5 \\
&\frac{dq'}{dt} + a_{61}\xi + a_{62}\eta + a_{63}u + a_{64}v + a_{65}p' + a_{66}q' = l_6
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Koeffizienten a_{ij} und die Grössen l_i sind aus der Mondtheorie bekannte Funktionen der Zeit. Wenn wir die Bezeichnungen

$$\nu_1^2 = \frac{3\mu}{a^3} k_1 \qquad \nu_2^2 = \frac{3\mu}{a^3} k_2 \qquad \nu_3^2 = \frac{3\mu}{a^3} \cdot \frac{B-A}{C}$$

einführen, wo a die halbe Grossachse der Mondbahn bedeutet, bekommen wir die folgenden Ausdrücke für die a_{ij}

$$a_{11} = 0 \qquad a_{14} = 0$$

$$a_{12} = -C\nu_3^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos^2 b \qquad a_{15} = \frac{C\nu_3^2}{2\sqrt{Cn}} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \cos\lambda_1$$

$$a_{13} = -\frac{B}{Cn} \nu_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \qquad a_{16} = \frac{C\nu_3^2}{2\sqrt{Cn}} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \sin\lambda_1$$

$$a_{21} = \frac{1}{C} \qquad a_{25} = -\frac{A}{4(Cn)^{3/2}} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \sin\lambda_1$$

$$a_{22} = 0 \qquad a_{26} = \frac{A}{4(Cn)^{3/2}} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \cos\lambda_1$$

$$a_{23} = 0$$

$$a_{24} = -\frac{A}{4(Cn)^{3/2}} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b$$

$$a_{31} = \frac{A}{4(Cn)^{3/2}} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \qquad a_{35} = -\frac{A}{Cn} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2b \sin\lambda_1$$

$$a_{32} = 0 \qquad a_{36} = \frac{A}{Cn} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2b \cos\lambda_1$$

$$a_{33} = 0$$

$$a_{34} = -k_1 n - \frac{A}{Cn} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2b$$

$$a_{41} = 0 \qquad a_{44} = 0$$

$$a_{42} = \frac{B}{2\sqrt{Cn}} \nu_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \qquad a_{45} = \frac{B}{Cn} \nu_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 b \cos\lambda_1$$

$$a_{43} = k_2 n - \frac{B}{Cn} \nu_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 b \qquad a_{46} = -\frac{B}{Cn} \nu_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 b \sin\lambda_1$$

$$a_{51} = -\frac{A}{4(Cn)^{3/2}} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \cos\lambda_1 \qquad a_{54} = \frac{B}{Cn} \nu_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 b \sin\lambda_1$$

$$a_{52} = \frac{C}{2\sqrt{Cn}} \nu_3^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \sin\lambda_1 \qquad a_{54} = \frac{A}{Cn} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2b \cos\lambda_1$$

$$a_{55} = \frac{A}{2Cn} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2b \sin 2\lambda_1 + \frac{B}{2Cn} \nu_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 b \sin 2\lambda_1$$

$$a_{56} = -n - \frac{A}{Cn} \nu_1^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2b \cos^2\lambda_1 + \frac{B}{Cn} \nu_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 b \sin^2\lambda_1$$

$$a_{61} = -\frac{3A}{4(Cn)^{3/2}}\nu_2^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \sin \lambda_1 \qquad a_{63} = -\frac{B}{Cn}\nu_2^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin {}^2b \cos \lambda_1$$

$$a_{62} = -\frac{C}{2\sqrt{Cn}}\nu_3^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \cos \lambda_1 \qquad a_{64} = \frac{A}{Cn}\nu_1^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2b \sin \lambda_1$$

$$a_{65} = n + \frac{A}{Cn}\nu_1^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2b \sin {}^2\lambda_1 - \frac{B}{Cn}\nu_2^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin {}^2b \cos {}^2\lambda_1$$

$$a_{66} = -\frac{A}{2Cn}\nu_1^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2b \sin 2\lambda_1 - \frac{B}{2Cn}\nu_2^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin {}^2b \sin 2\lambda_1$$

Die rechte Seite in den Gleichungen (6) wird

$$l_1 = 0 \qquad l_4 = 0$$

$$l_2 = \frac{d\lambda_1}{dt} \qquad l_5 = -\frac{A}{2\sqrt{Cn}}\nu_1^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \cos \lambda_1$$

$$l_3 = \frac{A}{2\sqrt{Cn}}\nu_1^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \qquad l_6 = -\frac{A}{2\sqrt{Cn}}\nu_1^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2b \sin \lambda_1$$

Diese linearen Differentialgleichungen (6) werden wir unserer Diskussion über die Drehung des Mondes zu Grunde legen. Bei ihrer numerischen Anwendung werden wir einige Glieder der dritten Ordnung in der Störungsfunktion berücksichtigen, doch ohne die lineare Form der Gleichungen zu verändern.

III.

Über Stabilitätsverhältnisse bei gebundener Rotation.

10. Bei diesen Betrachtungen des Rotationsproblemes des Mondes sind wir also, indem wir die zu gewissen partikulären Integralen der Bewegungsgleichungen gehörenden Variationsgleichungen aufgestellt haben, zu einem System linearer Differentialgleichungen gekommen, welches homogen wird, wenn wir noch immer an der Annahme festhalten, dass der Mond sich in einem ebenen Kreis bewege, und die Mondbahn zur XY-Ebene genommen wird. In diesem Falle werden die Koeffizienten a_{ij} zu Konstanten reduziert, während sie periodische Funktionen der Zeit werden, wenn der Mond sich in einer KEPLER'schen Ellipse bewegt.

Die Stabilität der Rotation ist von der partikulären Lösung entsprechenden charakteristischen Exponenten abhängig, welche wir berechnen und dabei die Exzentrizität der Mondbahn vernachlässigen wollen, deren Einwirkung auf die Exponenten ja von zweiter Ordnung und also unbedeutend ist. Dann reduzieren sich alle a_{ij} auf Null mit Ausnahme der folgenden, für die wir die nachstehenden Ausdrücke bekommen.

$$a_{12} = -C\nu_3^2 \qquad a_{43} = k_2 n$$

$$a_{21} = \frac{1}{C} \qquad a_{54} = \nu_1^2 \frac{A}{Cn}$$

$$a_{31} = -k_1 n - \nu_1^2 \frac{A}{Cn} \qquad a_{56} = -n - \nu_1^2 \frac{A}{Cn}$$

$$a_{36} = \nu_1^2 \frac{A}{Cn} \qquad a_{65} = n$$

Wenn die Grösse c eingeführt wird durch das Setzen von

$$\nu_1^2 \frac{A}{Cn} = c^2 k_1 n$$

oder, wie es ersichtlich ist, wenn man an den Ausdruck der mittleren Bewegung im Zweikörperproblem denkt

$$c^2 = \frac{3A}{C} \frac{\mu}{\mu + \mu'},$$

worin μ' die Mondmasse bezeichnet, so wird unser Gleichungssystem, dessen charakteristische Exponenten wir berechnen werden,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt} - C\nu_3{}^2\eta = 0\\
&\frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{C}\xi = 0\\
&\frac{du}{dt} - (1+c^2)k_1 nv + c^2 k_1 nq' = 0\\
&\frac{dv}{dt} + k_2 nu = 0\\
&\frac{dp'}{dt} + c^2 k_1 nv - (1+c^2k_1)\,nq' = 0\\
&\frac{dq_1}{dt} + np' = 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Die beiden ersten Gleichungen bilden ein System, welches unabhängig von den Übriden integriert werden kann. Wird in dieses.

$$\xi \quad e^{\alpha t} \text{ und } \mu \quad e^{\alpha t}$$

eingesetzt so erhalten wir unmittelbar

$$\alpha^2 = -\nu_3{}^2.$$

Da stabile Bewegung imaginäre charakteristische Exponenten verlangt, muss

$$B - A > 0,$$

damit die Bewegung stabil sei.

11. Um nun die übrigen Exponenten zu bestimmen, erhalten wir, wenn wir einen davon mit sn bezeichnen, die untenstehende Gleichung

$$\begin{vmatrix} s, & -(1+c^2)k_1, & 0, & c^2k_1 \\ k_2, & s, & 0, & 0 \\ 0, & c^2k_1, & s, & (1+c^2k_1) \\ 0, & 0, & 1, & s \end{vmatrix} = 0$$

Wird diese Determinante entwickelt und wird

$$\begin{aligned} P &\quad 1 + c^2k_1 + (1+c^2)\,k_1k_2 \\ Q &\quad (1 + c^2 + c^2k_1)\,k_1k_2 \end{aligned}$$

gesetzt, erhalten wir die Gleichung

$$s^4 + Ps^2 + Q = 0,$$

aus welcher

$$2s^2 = -P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}$$

folgt. Für den Diskriminanten

$$P^2 - 4Q$$

wird der Ausdruck

$$[1 + c^2k_1 - (1 + c^2)k_1k_2]^2 + 4c^2k_1{}^2k_2$$

erhalten. Die Wurzeln s^2 sind also reell, vorausgesetzt dass k_2 positiv ist.

Nun ist aber $4c^2k_1{}^2k_2$ eine Quantität, die wegen ihrer Grössenordnung in allen im Planetensystem bekannten Fällen vernachlässigt werden kann. Im Mondproblem sind k_1 und k_2 von der Grössenordnung 0,0005, und also ist die Vernachlässigung berechtigt, besonders da früher versäumte Glieder auf die charakteristischen Exponenten mit Beträgen gleicher Grössenordnung einwirken würden.

Wir erhalten dann folgende Werte von s^2

$$s^2 = \begin{cases} -(1 + c^2k_1) \\ -(1 + c^2)k_1k_2, \end{cases}$$

und unsere charakteristischen Exponenten sind

$$\pm \sqrt{-1}\, n \sqrt{1 + c^2k_1}$$
$$\pm \sqrt{-1}\, n \sqrt{(1 + c^2)k_1k_2}.$$

12. Wir werden nun sehen, welche Bewegungsformen möglich sind.

Oben haben wir gefunden, dass die Stabilität $B > A$ fordert

Wir unterscheiden drei verschiedene Fälle.

a. k_1 und k_2 haben verschiedene Vorzeichen.

Dann wird der Ausdruck unter den Wurzelzeichen in den beiden letzten Exponenten negativ und die Exponenten selbst reell und die Rotation also *unstabil.* In diesem Falle würde die Hauptachse C die mittlere Trägheitsachse sein, und daher ist gebundene Rotation um diese Achse unmöglich.

b. k_1 und k_2 sind beide positiv.

In diesem Falle werden ja die Exponenten imaginär und die Bewegung daher *stabil*, wenn

$$C > B > A.$$

c. k_1 und k_2 sind beide negativ.

Dann ist $C < A$ und die Voraussetzung der Stabilität

$$1 + c^2k_1 > 0.$$

oder

$$1 + \frac{3(C - A)}{C} \frac{\mu}{\mu + \mu'} > 0,$$

woraus

$$A > C > \frac{3\mu}{4\mu + \mu'} A.$$

Wir erhalten also das Resultat, dass die der Lösung

$$\xi = Cn, \quad \eta = u = v = p' = q' = 0$$

entsprechende gebundene Rotation um die kleinste Trägheitsachse stattfinden kann mit der mittleren Achse gegen den störenden Körper gerichtet, wenn obenstehende Ungleichheit vorhanden ist.

Es gibt also die beiden Möglichkeiten

$$C > B > A$$

und

$$B > A > C > \frac{3\mu}{4\mu + \mu'} A .$$

Gebundene Rotation muss also entweder um die grösste oder um die kleinste Trägheitsachse stattfinden. Welcher von den beiden Fällen bei der Rotation des Mondes vorhanden ist, geht aus dem dritten Gesetze Cassini's hervor, was später ersichtlich wird.

13. Betreffs der Puiseux'schen Resultate können wir eine ganz wichtige Anmerkung machen.

Aus der Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik ist die Quantität k_1 eindeutig bestimmt und hat sich hieraus zu dem annäherenden Wert 0.0006 ergeben. Setzt man

$$k_3 = \frac{B - A}{A},$$

existiert zwischen k_1, k_2 und k_3 die Verbindung

$$k_1 = k_2 + k_3,$$

wenn Glieder der dritten Ordnung in Bezug auf die als sehr klein zu betrachtenden k-Quantitäten vernachlässigt werden.

Aus den Hauptgliedern in der Libration in Longitud kann man k_3 berechnen, und Franz und Hayn haben gefunden, dass diese Grösse die Hälfte bez. ein Viertel von k_1 ausmacht, während Puiseux in derselben Weise aus seinen Rechnungen

$$k_3 = 0.001178$$

erhalten hat. Mit diesem grossen k_3-Werte würde k_2 sich negativ ergeben. Dies ist aber in Widerspruch mit den Stabilitätsbedingungen, was entweder die Annahme stützt, dass der Mond nicht wie ein fester Körper rotiert, oder auch gegen die Zuverlässigkeit der Puiseux'schen Resultate spricht.

Indessen kann gebundene Rotation existieren unter Verhältnissen, die nicht die hier ausgesprochenen Bedingungen der Stabilität erfüllen. In »Meddelande N:r 37» hat Charlier die Möglichkeit einer eigentümlichen Rotationsart erwähnt, die in Anbetracht der hier gemachten Voraussetzungen unstabil ist, indem er zeigt, dass gebundene Rotation vorkommen kann gleichzeitig damit, dass der rotierende Körper sich langsam um den Radius Vektor des störenden Körpers dreht.

IV.

Integration der Bewegungsgleichungen.

14. Die in N:r 9 erhaltenen Differentialgleichungen für die Variabeln ξ, η, u, v, p' und q' wollen wir nun zur Untersuchung der physischen Mondlibration benutzen.

Wird die Ekliptik zur XY-Ebene genommen, so erhält man Ausdrücke untenstehender Form für die in die Gleichungen eingehenden selenozentrischen Erdkoordinaten als Funktionen der Zeit.

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3 &= A_0 + \Sigma A_i \cos(\alpha_i n t + h_i)\\ b &= \Sigma B_i \sin(\alpha_i n t + h_i)\\ \lambda_1 &= \Sigma C_i \sin(\alpha_i n t + h_i).\end{aligned}$$

Man hat es also mit einem System linearer Differentialgleichungen zu tun, deren Koeffizienten trigonometrische Funktionen der Zeit sind. Wird die rechte Seite des Systems gleich Null gesetzt, so ergeben sich die der freien Libration entsprechenden Integrale. Nimmt man in den Erdkoordinaten nur die Glieder, die aus einer elliptischen Mondbahn entstehen, so haben ja die Koeffizienten die Periode $\frac{2\pi}{n}$, und die allgemeinen Integrale würden das Aussehen

$$\sum_{i=1}^{6} \varkappa_i e^{s_i t} f_i(t)$$

haben, wo die $\varkappa_i$ Konstanten sind, s_i die charakteristischen Exponenten, und die $f_i(t)$ periodische Funktionen der Zeit mit der Periode $\frac{2\pi}{n}$.

Das System zu integrieren unter Berücksichtigung der vollständigen Form der Koeffizienten auf der linken Seite, beispielsweise nach der Methode von Hill, ist aber ziemlich umständlich und ist auch nicht notwendig, da annähernde Integralwerte sehr wohl ausreichen, um die Bewegung numerisch auseinanderzusetzen.

15. Auf der linken Seite der Gleichungen (6) behalten wir also nur die unveränderlichen Teile der Koeffizienten a_{ij}. Wenn wir die variablen Teile derselben als klein betrachten, können wir in den dadurch ausser Acht gelassenen Gliedern, die ja von zweiter Grössenordnung sind, die Veränderlichen ξ, η, u etc. durch genäherte Werte ersetzen, und zwar durch solche Werte, als ob die Cassini'schen Gezetze exakt wären. In diesem Falle wäre

$$\xi = 0, \qquad \eta = \lambda_1$$

und, wenn wir die Bewegung der Zentralachse im Körper vernachlässigen, $u = v = 0$, während approximativ nach N:r 8

$$p' = -\varepsilon_0 \sqrt{Cn}\cos F$$
$$q' = \varepsilon_0 \sqrt{Cn}\sin F$$

wo F den Winkelabstand zwischen dem Mond und den aufsteigenden Knoten der Mondbahn bezeichnet und ε_0 den als konstant zu betrachtenden Winkel zwischen der Drehungsachse und der Z-Achse. Dann ist nämlich u_3 gleich der Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn, und also

$$\eta_3 + \lambda_1 = 180 - F.$$

Wir haben dann wieder Konstanten als Koeffizienten zu den Variabeln, und zwar die in N:r 10 aufgeschriebenen. Die bekannten Teile der Differentialgleichungen dagegen werden verändert.

In derselben Weise wollen wir einige Quantitäten dritter Ordnung in der Störungsfunktion berücksichtigen, die numerisch eine gewisse Einwirkung ausüben. Dies ist in $\cos^2\alpha$ die Glieder

$$-\cos^2 b\frac{p'q'\sin\eta_1}{\xi_1} - 2\sin b\cos b\sin^2\eta\frac{q'\cos\lambda_1}{\sqrt{\xi_1}}$$

und in $\cos^2\beta$

$$\frac{\cos^2 b(p'q' + 2uq')\sin\eta_1}{\xi_1} + 2\sin b\cos b\sin^2\eta_1\frac{q'\cos\lambda_1}{\sqrt{\xi_1}}.$$

Werden alle bekannten Glieder auf die rechte Seite gebracht, so bekommen wir somit für diese in den vier letzten Gleichungen die Ausdrücke

$$c^2k_1n\sqrt{Cn}\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin b\cos b - \varepsilon_0\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2b\sin\lambda_1\cos F - \varepsilon_0\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2b\cos\lambda_1 - 1\right]\sin F\right\},$$

$$c^2k_1n\sqrt{Cn}f\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin b\cos b\sin\lambda_1 - \varepsilon_0\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 b\cos\lambda_1\cos F + \varepsilon_0\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin\lambda_1\sin F\right],$$

$$c^2k_1n\sqrt{Cn}\left\{-\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin b\cos b\cos^3\lambda_1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3\sin b\cos b\sin^2\lambda_1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin\lambda_1\cos F + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_0\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2b\cos^2\lambda_1 - 1\right]\sin F + f\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin\lambda_1\cos F\right\},$$

und

$$c^2 k_1 n \sqrt{Cn} \left\{ \varepsilon_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin {}^2\lambda_1 \cos F + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \lambda_1 \sin F + \right.$$

$$\left. + f\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin b \cos b \sin \lambda_1 \cos \lambda_1 - \varepsilon_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin {}^2 b \cos F + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \lambda_1 \sin F \right] \right\},$$

wenn von einigen Gliedern der vierten Grössenordnung in b, λ_1 und ε_0 abgesehen wird und

$$k_2 = f \cdot k_1, \quad k_3 = (1 - f) k_1$$

gesetzt ist.

In den Gleichungen für ξ und η, die die Libration in Longitud bestimmen, werden wir die Grössen höherer Ordnung ganz vernachlässigen, da sie numerisch ohne Einfluss sind.

16. Um die Glieder in den Variabeln zu erhalten, die die freien Schwingungen des Mondes verursachen, haben wir folglich das vorher aufgeschriebene System (7) zu benutzen, dessen vier letzte Gleichungen befriedigt sind von

$$\begin{aligned} u &= E \cos(\sigma n t + \gamma), \\ v &= F \sin(\sigma n t + \gamma), \\ p' &= G \cos(\sigma n t + \gamma), \\ q' &= H \sin(\sigma n t + \gamma). \end{aligned} \tag{9}$$

Um die Konstanten E, F, G und H zu bestimmen, ergeben sich durch Einsetzen die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\sigma E - (1 + c^2) k_1 F + c^2 k_1 H &= 0, \\ k_2 E + \sigma F &= 0, \\ c^2 k_1 E - \sigma G - (1 + c^2 k_1) H &= 0, \\ G + \sigma H &= 0. \end{aligned}$$

Zur Ermittlung von σ bekommt man hieraus

$$\begin{vmatrix} -\sigma, & -(1 + c^2 k_1), & 0, & c^2 k_1 \\ k_2, & \sigma, & 0, & 0 \\ 0, & c^2 k_1, & -\sigma, & -(1 + c^2 k_1) \\ 0, & 0, & 1, & \sigma \end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

welche Gleichung dieselbe ist wie die in N:r 11 zur Bestimmung der charakteristischen Exponenten, mit dem Unterschiede dass hier $-\sigma$ in der ersten und dritten Reihe anstatt σ steht. Wird die Determinante entwickelt, hat man folglich mit den Werten von P und Q aus N:r 11

$$\sigma^4 - P\sigma^2 + Q = 0$$

mit den beiden Werten von σ^2

$$\begin{aligned} \sigma_1{}^2 &= 1 + c^2 k_1 \\ \sigma_2{}^2 &= (1 + c^2) k_1 k_2, \end{aligned} \tag{11}$$

wo dieselbe Approximation wie betreffs der s-Wurzeln gemacht ist.

Die Lösung von (9) gibt

$$\frac{-E}{\sigma(\sigma^2-1-c^2k_1)}=\frac{F}{k_2(\sigma^2-1-c^2k_1)}=\frac{G}{c^2k_1k_2\sigma}=\frac{-H}{c^2k_1k_2}.$$

Für $\sigma=\sigma_1$ und unter Vernachlässigung von Gliedern der Grössenordnung $k_1^2k_2$ ergeben sich untenstehende Ausdrücke der Koeffizienten, die mit E_1, F_1, G und H_1 bezeichnet werden.

$$E_1=F_1=0$$
$$G_1=-\sqrt{1+ck_1}H_1.$$

Und für $\sigma=\sigma_2$ bekommt man

$$F_2=-\sqrt{\frac{k_2}{(1+c^2)k_1}}E_2,$$

$$G_2=\frac{c^2k_1k_2}{1+c^2k_1-(1+c^2)k_1k_2}E_2,$$

$$H_2=-\frac{c^2\sqrt{k_1k_2}}{\sqrt{1+c^2}[1+c^2k_1-(1+c^2)k_1k_2]}E_2.$$

Da wie aus den Beobachtungen bekannt ist, sämtliche Koeffizienten E_1, F_1, G_1, etc. klein und auf Grund der Grössenordnung von k_1 und k_2, G_2 und H_2 verschwindend im Vergleich zu E_2 und F_2 sind, können wir auch G_2 und H_2 vernachlässigen.

Aus den Gleichungen für ξ und η werden unmittelbar die arbiträren Glieder in ξ und η

$$-A_0C\nu_3\cos(\nu_3t+a_0) \quad \text{und} \quad A_0\sin(\nu_3t+a_0).$$

erhalten.

Die Integrale unserer Differentialgleichungen, die die freie Libration bewirken, können wir deshalb, wie folgt, schreiben.

$$\xi=-A_0C\nu_3\cos(\nu_3t+a_0),$$
$$\eta=A_0\sin(\nu_3t+a_0),$$
$$u=E_2\cos(\sigma_2nt+\gamma_2),$$
$$v=-\frac{\sqrt{f}\,E_2}{\sqrt{1+c^2}}\sin(\sigma_2ut+\gamma_2),$$
$$p'=G_1\cos(\sigma_1nt+\gamma_1),$$
$$q'=-\frac{G_1}{\sqrt{1+c^2k_1}}\sin(\sigma_1nt+\gamma_1),$$

wo A_0, a_0, E_2, γ_2, G_1 und γ_1, Integrationskonstanten sind.

Da man genähert hat

$$\frac{u}{\sqrt{Cn}} = \theta_0 \cos u_1$$

$$\frac{v}{\sqrt{Cn}} = -\theta_0 \sin u_1,$$

und u_1, um 90^0 vermindert, die Länge der Zentralachse, auf die im Körper feste xy-Ebene bezogen, bezeichnet, ergibt es sich klar, dass die mechanische Bedeutung dieser Glieder in u und v darin besteht, dass die Zentralachse innerhalb des Körpers einen elliptischen Kegel um die Figurachse beschreibt, mit der Perigde $1 : \sigma_2$ siderische Monate, und nach den Ausdrücken für p' und q' würde sie im Raume einen zirkulären Kegel um den Pol der Ekliptik beschreiben. Diese Schwingungen würden offenbar den sekulären Störungen im Planetenproblem entsprechen.

Man kann indessen mittels dieser Methode die sekulären Störungen im Rotationsproblem nach dem Prinzip des Delaunay'schen Problems behandeln, und zwar hat Zinner dies für die Rotation eines Planeten getan[1] mit Anwendung der Veränderlichen α_i und u_i, von welchen u_1 und u_2 dabei als kurzperodisch betrachtet werden, u_3 aber als langperiodisch und also in die sekuläre Störungsfunktion eingehend. Diese Untersuchungen sind jedoch nicht anwendbar mit Bezug auf die Drehung des Mondes, indem u_3 hier dieselbe verhältnismässig kurze Periode wie der Knoten der Mondbahn besitzt, während u_1 in Anbetracht des kleinen Wertes von σ_2 als langperiodisch anzusehen ist.

16. Wird die rechte Seite der Gleichungen für die Libration in Länge berücksichtigt, so können sie geschrieben werden

$$\frac{d\xi}{dt} - C\nu_3{}^2\eta \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos{}^2 b = 0$$

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{\xi}{C} = \frac{d\lambda_1}{dt}, \tag{13}$$

woraus für η die Gleichung

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \nu_3{}^2\eta_1 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos{}^2 b = \frac{d^2\lambda_1}{dt^2}$$

entsteht.

Wird $\eta_1 = \lambda_1 + \Delta\eta$ gesetzt, so hat man, da $\lambda_1 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos{}^2 b$ in der Form

$$\Sigma L_i \sin(\alpha_i nt + h_i)$$

[1] Siehe Meddelande N:r 40.

darstellbar ist, und wenn Glieder der Grössenordnung $\Delta\eta$ mit den periodischen Gliedern, in $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ multipliziert, vernachlässigt werden, die Gleichung

$$\frac{d^2\Delta\eta}{dt^2} + \nu_3^2\Delta\eta = -\nu_3^2 \Sigma L_i \sin(\alpha_i nt + h_i), \tag{14}$$

woraus die partikuläre Lösung

$$\Delta\eta = \sum \frac{c^2k_3}{\alpha_i^2 - c^2k_3} L_i \sin(\alpha_i nt + h_i)$$

erhalten wird und wo

$$\nu_3^2 = c^2k_3n^2$$

eingeführt ist.

Wenn es in der rechten Seite ein Glied gibt, für welches $\alpha^2 = c^2k_3$ gilt, ist dieser Ausdruck nicht mehr gültig, sondern höhere Potenzen der Störungsfunktion müssen beachtet werden.

Als Integrale der Gleichungen (13) hat man also

$$\begin{aligned} \xi &= -A_0C\nu_3\cos(\nu_3t + a_0) - Cn\sum\frac{c^2k_3\alpha_iL_i}{\alpha_i^2 - c^2k_3}\cos(\alpha_i nt + h_i), \\ \eta &= A_0\sin(\nu_3t + a_0) + \lambda_1 + \sum\frac{c^2k_3\ L_i}{\alpha_i^2 - c^2k_3}\sin(\alpha_i nt + h_i). \end{aligned} \tag{15}$$

17. Die Gleichungen zur Bestimmung von u, v, p' und q' können wir, wenn ihre rechten Seiten in trigonometrische Reihen entwickelt sind, in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - (1 + c^2)k_1nv + c^2k_1nq' &= c^2k_1n\sqrt{Cn}\,\Sigma M_i\sin(\alpha_i nt + h_i), \\ \frac{dv}{dt} + k_2nu &= c^2k_1n\sqrt{Cn}\,\Sigma N_i\cos(\alpha_i nt + h_i), \\ \frac{dp'}{dt} + c^2k_1nv - (1 + c^2k_1)nq' &= c^2k_1n\sqrt{Cn}\,\Sigma P_i\sin(\alpha_i nt + h_i), \\ \frac{dq'}{dt} + np' &= c^2k_1n\sqrt{Cn}\,\Sigma Q_i\cos(\alpha_i nt + h_i). \end{aligned} \tag{16}$$

Dieses System wird befriedigt, indem man

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{Cn}\,E_i\cos(\alpha_i nt + h_i), \\ v &= \sqrt{Cn}\,F_i\sin(\alpha_i nt + h_i), \\ p' &= \sqrt{Cn}\,G_i\cos(\alpha_i nt + h_i), \\ q' &= \sqrt{Cn}\,H_i\sin(\alpha_i nt + h_i) \end{aligned}$$

setzt. Für jedes Argument in der rechten Seite von (16) tritt ein Glied mit demselben Argument in u, v, p' und q' ein. Um ihre Koeffizienten E_i, F_i, G_i und H_i zu bestimmen, bekommt man

$$
\begin{aligned}
-\alpha_i E_i - (1+c^2)k_1 F_i + \qquad & c^2 k_1 H_i = c^2 k_1 M_i,\\
k_2 E_i + \alpha_i F_i \qquad & = c^2 k_1 N_i,\\
c^2 k_1 F_i - \alpha_i G_i - (1+c^2 k_1) H_i & = c^2 k_1 P_i,\\
G_i + \alpha_i H_i & = c^2 k_1 Q_i,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

welches System die Auflösung hat

$$
\begin{aligned}
&\Delta E_i = c^2 k_1 \{(P_i + \alpha_i Q_i) c^2 k_1 \alpha_i - M_i(\alpha_i^2 - \sigma_1^2)\alpha_i - N_i[\alpha_i^2 - \sigma_1^2 + c^2(\alpha_i^2 - 1)]k_1\},\\
&\Delta H_i = c^2 k_1 [(P_i + \alpha_i Q_i)(\alpha_i^2 - \sigma_2^2) - M_i c^2 k_1 k_2 - N_i c^2 k_1 \alpha_i],\\
&\alpha_i F_i = c^2 k_1 N_i - E_i k_2.\\
&G_i = c^2 k_1 Q_i - \alpha_i H_i.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Hier wird mit Δ der Ausdruck

$$(\alpha_i^2 - \sigma_1^2)(\alpha_i^2 - \sigma_2^2)$$

bezeichnet.

Die allgemeinen Ausdrücke für u, v, p' und q' werden also

$$
\begin{aligned}
u &= E_2 \cos(\sigma_2 nt + \gamma_2) + \sqrt{Cn}\sum_{i>2} E_i \cos(\alpha_i nt + h_i),\\
v &= -\frac{\sqrt{f}E_2}{\sqrt{1+c^2}} \sin(\sigma_2 nt + \gamma_2) + \sqrt{Cn}\sum_{i>2} F_i \sin(\alpha_i nt + h_i).\\
p' &= G_1 \cos(\sigma_1 nt + \gamma_1) + \sqrt{Cn}\sum_{i>2} G_i \cos(\alpha_i nt + h_i),\\
q' &= -\frac{G_1}{\sqrt{1+c^2 k_1}} \sin(\sigma_1 nt + \gamma_1) + \sqrt{Cn}\sum_{i>2} H_i \sin(\alpha_i nt + h_i).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Wie hieraus erhellt, hat man überwiegend in u und v langperiodische Glieder, während die grössten Glieder in p' und q' kurzperiodisch sind.

18. Da genähert

$$\frac{p'}{\sqrt{Cn}} = \varepsilon \cos(\eta_3 + \lambda_1),$$

$$\frac{q'}{\sqrt{Cn}} = \varepsilon \sin(\eta_3 + \lambda_1),$$

ergibt sich aus einer einfachen Rechnung mit Vernachlässigen der kleinen arbiträren Glieder in p' und q'

$$tg(\eta_3 + \lambda_1 + F) = \frac{\frac{1}{2}\sum(-G_i + H_i)\sin(\alpha_i nt + h_i - F) + \frac{1}{2}\sum(G_i + H_i)\sin(\alpha_i nt + h_i + F)}{\frac{1}{2}(G_3 - H_3) + \frac{1}{2}\sum_{i>3}(G_i - H_i)\cos(\alpha_i nt + h_i - F) + \frac{1}{2}\sum(G_i + H_i)\cos(\alpha_i nt + h_i + F)},$$

wo F wieder der in N:r 15 definierte Winkelabstand ist, und G_3 und H_3 die entsprechenden Koeffizienten in p' und q' sind. Wie sich aus der numerischen Behandlung im folgenden Abschnitt ergibt, ist $\frac{1}{2}(G_3 - H_3)$ numerisch grösser als die

Summe der absoluten Werte aller übrigen Koeffizienten im Nenner. Wie Laplace vorher bewiesen hat, ergibt sich hieraus, dass $\eta_3 + \lambda_1 + F$ Libration entweder mit den Werten 0^0 oder 180^0 hat, je nachdem ob $\frac{1}{2}(G_3 - H_3)$ positiv oder negativ ist. Hierin hat man die theoretische Erklärung des dritten Gesetzes Cassini's. Zwar haben wir in N:r 15 schon dieses benutzt, um die rechte Seite der Bewegungsgleichungen zu bilden, aber das oben erwähnte Verhältnis ist natürlich davon unabhängig.

Nennt man nämlich die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn Ω, so hat die Winkelgrösse u_3 Libration mit entweder Ω oder $180^0 + \Omega$. Im vorigen Falle liegt der Pol der Ekliptik zwischen den Polen der Mondbahn und des Mondäquators, während dieser letztere in der Mitte liegt, wenn u_3 mit $180 + \Omega$ Libration hat. Nach Cassini's drittem Gesetz oszilliert u_3 um Ω, und folglich muss $\frac{1}{2}(G_3 - H_3)$ negativ sein. Für diese Grösse wird der genäherte Wert

$$-\frac{c^2 k_1 (1 + \frac{1}{2}g) \cdot P_3}{2g + g^2 - c^2 k_1}$$

erhalten, wo $n(1 + g)$ die mittlere Bewegung der Winkelgrösse F ist, und, wie aus dem Späteren hervorgeht, P_3 positiv und g eine kleine positive Grösse ist.

Man muss also

$$k_1 > 0$$

haben, sofern nicht

$$c^2 k_1 > 2g + g^2,$$

woraus gewisse ausgeschlossene Werte von k_1 folgen.

19. Aus den jetzt erhaltenen Werten unserer Variabeln können wir die Ausdrücke von den Euler'schen Winkeln ψ, φ und θ herleiten.

Man hat nach N:r 7

$$\begin{aligned} \varphi + u_1 &= -u_2 + \frac{\theta_0}{\varepsilon} \sin u_2, \\ \psi + u_3 &= \frac{\theta_0}{\varepsilon} \sin u_2, \\ \theta &= \varepsilon + \theta_0 \cos u_2. \end{aligned}$$

Um ε, die Neigung zwischen der Z-Achse und der Zentralachse, zu erhalten, haben wir annäherungsweise die Relationen

$$\begin{aligned} \varepsilon \cos(\eta_3 + \lambda_1) &= \Sigma G_i \cos(\alpha_i n t + h_i), \\ \varepsilon \sin(\eta_3 + \lambda_1) &= \Sigma H_i \sin(\alpha_i n t + h_i), \end{aligned}$$

wenn wir die konstante Grösse $\sqrt{Cn}$ in die Integrationskonstanten G_1 und H_1 eingehen lassen und auch die Argumente der arbiträren Glieder in derselben Weise wie die der übrigen bezeichnet werden. Durch Quadrieren und Addieren ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma(G_i^2 + H_i^2) &+ \tfrac{1}{2}\Sigma(G_i^2 - H_i^2)\cos 2(\alpha_i n t + h_i) + \\ &+ \Sigma(G_i G_j + H_i H_j)\cos[(\alpha_i - \alpha_j)nt + h_i - h_j] \\ &+ \Sigma(G_i G_j - H_i H)\cos[(\alpha_i + \alpha_j)nt + h_i + h_j]. \end{aligned}$$

Wird jetzt

$$\varepsilon_0^2 = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(G_i^2 + H_i^2)$$

gesetzt, so können wir, weil alle G_i und H_i mit Ausnahme derer mit dem Argument F, die mit G_3 und H_3 bezeichnet werden, klein sind, schreiben

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \Sigma\,\frac{G_3+H_3}{2}\cos 2F + \tfrac{1}{2}\,\Sigma'(-G_i+H_i)\cos(\alpha_i nt+h_i-F) - \tfrac{1}{2}\,\Sigma'(G_i+H_i)\cos(\alpha_i nt+h_i+F)$$

wenn in den als klein zu betrachtenden periodischen Gliedern $\varepsilon_0 = H_3 = -G_3$, gesetzt wird, was nahe erfüllt ist, und der Akzent deutet an, dass die $i=3$ entsprechenden Glieder ausgeschlossen werden sollen.

Aus den Gleichungen (19) wird auch hergeleitet

$$\eta_3 + \lambda_1 + F - 180^0 = -\frac{G_3+H_3}{2\varepsilon_0}\sin 2F - \sum{}'\frac{-G_i+H_i}{2\varepsilon_0}\sin(\alpha_i nt + h_i - F) - \sum{}'\frac{G_i+H_i}{2\varepsilon_0}\sin(\alpha_i nt + h_i + F).$$

Wenn wir die Summe aller dieser Glieder in der rechten Seite $\Delta\eta_3$ nennen, ergibt sich

$$\eta_3 = 180 - F - \lambda_1 + \Delta\eta_3.$$

Nun ist

$$u_2 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$

oder

$$u_2 = 180 + \eta_2 - F + \Delta\eta_1 + \Delta\eta_3.$$

Werden Glieder der Grössenordnungen $\theta_0\,\Delta\eta$ und $\theta_0\,\Delta\eta_3$ vernachlässigt, so bekommen wir

$$\theta_0 \sin u_2 = -\theta_0 \sin\eta_2 \cos F + \theta_0 \cos\eta_2 \sin F,$$
$$\theta_0 \cos u_2 = -\theta_0 \cos\eta_2 \cos F - \theta_0 \sin\eta_2 \sin F,$$

und approximativ ist

$$\theta_0 \cos\eta_2 = \Sigma\, E_i \cos(\alpha_i nt + h_i),$$
$$\theta_0 \sin\eta_2 = \Sigma\, F_i \sin(\alpha_i nt + h_i).$$

Wird dies in das Vorige eingesetzt, so erhalten wir

$$\theta_0 \sin u_2 = -\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(E_i + F_i)\sin(\alpha_i nt + h_i - F) + \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(E_i - F_i)\sin(\alpha_i nt + h_i + F),$$

$$\theta_0 \cos u_2 = -\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(E_i + F_i)\cos(\alpha_i nt + h_i - F) - \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(E_i - F_i)\sin(\alpha_i nt + h_i - F).$$

Weiter ergibt sich

$$u_3 = \Omega + \Delta\eta_3.$$

Zuletzt können wir also die Ausdrücke der Euler'schen Winkel ψ und θ in der Form schreiben

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(\psi - \Omega) &= \tfrac{1}{2}\Sigma\,(\quad E_i \quad F_i + G_i + H_i)\sin(\alpha_i nt + h_i + F) + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Sigma\,(-E_i - F_i - G_i + H_i)\sin(\alpha_i nt + h_i - F)\,, \\ \theta &= \varepsilon_0 - \tfrac{1}{2}(E_3 - F_3) - \tfrac{1}{2}\Sigma\,(\quad E_i - F_i + G_i + H_i)\cos(\alpha_i nt + h_i + F) + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Sigma\,(-E_i - F_i - G_i + H_i)\cos(\alpha_i nt + h_i - F)\,,\end{aligned} \tag{20}$$

wo in der letzten Summe der dem Argument F entsprechende Koeffizient ausgeschlossen werden soll.

Wird in der Libration in Länge die Grösse $\varkappa_1$, die den genäherten Wert $-\frac{\varepsilon\theta_0}{4}$ hat, berücksichtigt, so erhält man nach den Formeln in N:r 7

$$\varphi = \psi + 180 + \lambda_0 - \Delta\eta + 2\varkappa_1 \sin u_2$$

mit λ_0 als Bezeichnung für die mittlere Länge des Mondes, und $\theta_0 \sin u_2$ und $\Delta\eta$ sind aus dem Obenstehenden gegeben.

20. Wird der konstante Teil der Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik mit $[\theta]$ bezeichnet, so erhalten wir für diesen die Relation

$$[\theta] = \varepsilon_0 - \tfrac{1}{2}(E_3 + F_3)\,.$$

Da mit ziemlich grosser Approximation

$$\varepsilon_0 = \left(1 + \frac{g}{2}\right) H_3$$

ist, erhalten wir, wenn E_3 durch einen genäherten Wert ersetzt und F_3 vernachlässigt wird, hieraus die Relation, die zur Berechnung von k_1 aus der Neigung angewandt worden ist. Wird die Einwirkung der arbiträren Glieder auf die Neigung berücksichtigt, so ergeben sich gewisse Grenzen für k_1, was Lagrange nachgewiesen hat und was auch aus dem oben Erwähnten hervorgehen dürfte.

V.

Numerische Berechnung der Störungsglieder.

21. Die im vorigen Abschnitt auseinandergesetzten Formeln werden wir nun benutzen, um die von der Erde verursachten Ungleichheiten in der Monddrehung numerisch zu berechnen. Um einen Vergleich mit HAYN anstellen zu können, werden wir uns des von ihn gefundenen Wertes $k_1 = 0.0006289$ bedienen und der beiden Werte $^1/_2$ und $^3/_4$ für die Grösse f. Unter Annahme des ersteren, aus den Berechnungen von FRANZ sich ergebenden Wertes und $k_1 = 0.0006256$ hat er die Störungen genau berechnet, während er aus seinen Beobachtungen den Schluss zieht, dass f den letzteren Wert hat.

Das Verhältnis der Massen der Erde und des Mondes werden wir zu 81.5 setzen, was $c^2 = 2.96177$ gibt.

Für $f = {}^1/_2$ wird $k_3 = 0.0003145$ und die Periode der willkürlichen Libration in Longitud wird 32,8 siderische Monate, während $f = {}^3/_4$ den k_3-Wert 0.0001572 und die fragliche Periode 40.4 siderische Monate liefert. Nach dem von PUISEUX unter Voraussetzung, dass der Mond wie ein fester Körper rotiere, angedeuteten Wert würde diese Periode etwa 17 Monate sein. Indessen scheint es aus allen hierüber angestellten Beobachtungen hervorzugehen, dass die Amplitüde dieser Libration sehr klein ist.

Der Betrag der Grösse σ_1 wird in beiden Fällen, da er von k_1 unabhängig ist, 1.000930, und σ_2 kann in der Form

$$0.001252\sqrt{f}$$

geschrieben werden. Hieraus ergibt sich für die Dauer der Perioden der auchwahrscheinlich sehr kleinen arbiträren Glieder in u und v etwa bez. 1130 und 922 Monate, bei den beiden Annahmen über die Grösse f, während die entsprechenden Glieder in p' und q' in beiden Fällen eine Periode besitzen, die sich nur um ungefähr eine halbe Stunde von einem Monate unterscheidet.

22. Um die in N:r 15 aufgeschriebenen Ausdrücke der rechten Seiten unserer Differentialgleichungen in trigonometrische Reihen zu entwickeln, werden wir die von BROWN [1] gegebenen Werte der Mondkoordinaten benutzen.

[1] Memoirs of the royal astr. society vol. LVII. Part. II.

Die in seinen Reihen angewandten Argumente können in der Form

$$il + i'l' + jF + j'D$$

geschrieben werden, wo i, i', j und j' ganze Zahlen sind, und

l die mittlere Anomalie des Mondes bezeichnet
l' » » » der Sonne »

und D den mittleren Abstand des Mondes von der Sonne und F die in N:r 18 definierte Winkelgrösse bedeutet.

Die mittleren Bewegungen dieser vier Argumente l, l', F und D können geschrieben werden

$$n(1-h), \quad n \cdot m, \quad n(1+g) \quad \text{und} \quad n(1-m)$$

Dabei ist nach Browns oben erwähnter Arbeit s. 110

hn	die jährliche mittl. Bewegung				des Mondperigäums	$= +$	146 426,″92
$-gn$	»	»	»	»	» Knotens der Mondbahn	$= -$	69672,″04
n	»	»	»	»	» Mondes	$= +$	17325594,″06
nm	»	»	»	»	der Sonne.	$= +$	1295977′,′42

Hieraus wird hergeleitet

$$m = 0{,}07480134$$
$$h = 0{,}00845148$$
$$g = 0{,}00402134$$

Aus den Brown'schen Entwickelungen sind dann alle Glieder in λ_1 und b mit einem Koeffizienten grösser als 1″ entnommen und, in Bogensekunden ausgedrückt, in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt, wo auch die periodischen Glieder in $\frac{a}{r}$ in Teilen des Radius mit fünfstelliger Genauigkeit gegeben sind. Die Argumente sind in derselben Weise in Browns Tabelle geordnet. Um λ_1 und b zu erhalten, hat man den Koeffizienten mit dem Sinus der Argumente zu multiplizieren, während die periodischen Glieder in $\frac{a}{r}$ aus Cosinusgliedern bestehen. Diese Koeffizienten liegen also der folgenden numerischen Behandlung des Problems zu Grunde.

TAB. 1.

Argument				Koeff.		Argument				Koeff.
l	l'	F	D	λ_1	$\frac{a}{r}$	l	l'	F	D	b
0	0	0	4	+ 13,9	+ 0,00008	0	0	1	4	— 1,2
			2	+ 2369,9	+ 0,00825				2	— 117,3
			1	— 124,8	— 0,00029				1	+ 5,4
1	0	0	4	+ 2,0	+ 0,00001				0	— 18461,5
			2	+ 192,0	+ 0,00090				— 1	— 4,8
			1	— 8,4	— 0,00003				— 2	+ 623,7
			0	+ 22639,6	+ 0,05450				— 4	+ 3,7
			— 1	+ 18,6		1	0	1	2	— 15,1
			— 2	— 4586,4	+ 0,01002				0	— 1010,2
			— 3	+ 3,2	— 0,00001				— 2	+ 166,6
			— 4	— 38,4	+ 0,00018				— 4	+ 6,6
0	1	0	2	— 24,5	— 0,00009	— 1	0	1	4	— 3,0
			1	+ 18,0	+ 0,00004				2	— 199,5
			0	— 668,9	— 0,00012				0	+ 999,7
			— 2	— 165,4	+ 0,00056				— 2	+ 33,4
			— 4	— 1,9	+ 0,00001	0	1	1	2	+ 1,3
2	0	0	2	+ 14,4	+ 0,00008				0	+ 6,5
			0	+ 769,0	+ 0,00297				— 2	+ 29,7
			— 1	+ 1,7		0	— 1	1	2	— 8,0
			— 2	— 211,7	— 0,00009				0	— 4,9
			— 3	+ 1,2					— 2	— 12,1
			— 4	— 30,8	+ 0,00011	2	0	1	2	— 1,5
1	1	0	2	— 2,9	— 0,00001				0	— 61,9
			1	+ 1,3					— 2	+ 15,6
			0	— 109,8	— 0,00028	— 2	0	1	4	— 2,4
			— 2	— 206,2	+ 0,00042				2	+ 1,6
			— 4	— 4,4	+ 0,00002				0	+ 31,8
1	— 1	0	2	+ 14,6	+ 0,00007				— 2	+ 2,1
			0	+ 147,9	+ 0,00034	0	2	1	— 2	+ 1,1
			— 1	— 1,1		1	1	1	0	+ 5,3
			— 2	+ 28,5	— 0,00007				— 2	+ 7,5
0	2	0	0	— 7,5		— 1	1	1	+ 2	+ 1,3
			— 2	— 8,1	+ 0,00003				0	+ 5,7
3	0	0	2		+ 0,00001				— 2	+ 1,8
			0	+ 36,1	+ 0,00018	1	— 1	1	2	— 1,1
			— 2	— 13,2	— 0,00004				0	— 6,8
			— 4	— 1,2		— 1	— 1	1	2	— 8,9
2	1	0	0	— 7,7	— 0,00003				0	— 5,1
			— 2	— 8,6	— 0,00001	3	0	1	0	— 4,0
			— 4	— 2,7	+ 0,00001				— 2	+ 1,5
2	— 1	0	2	+ 1,2	+ 0,00001	— 3	0	1	0	+ 1,6
			0	+ 9,7	+ 0,00004	0	0	3	0	+ 6,3
			— 2	— 2,5					— 2	+ 2,2
1	2	0	0	— 1,2		1	0	3	0	+ 1,0
			— 2	— 7,4	+ 0,00001	— 1	0	3	0	+ 2,8
1	— 2	0	0	+ 2,6	+ 0,00001					
			— 2	+ 2,5	— 0,00001					
4	0	0	0	+ 1,9	+ 0,00001					
0	0	2	2	— 5,7						
			0	— 411,6						
			— 2	— 55,2	— 0,00003					
1	0	2	0	— 45,1						
			— 2		— 0,00002					
1	0	— 2	2	— 6,4	— 0,00001					
			0	+ 39,5	— 0,00021					
			— 2	+ 9,4						
0	1	2	— 2	— 2,2						
0	1	— 2	2	— 1,4						
2	0	2	0	— 4,0						
2	0	— 2	0	— 1,8						

23. Wir werden nun zuerst die Gleichung für $\Delta\eta$ behandeln, die die Libration in Longitud gibt.

Wenn in Betracht gezogen wird, dass k_3 eine kleine Grösse ist, so ist es klar dass nur die Glieder in $\Delta\eta$ bemerkbar werden, deren Koeffizienten in $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \lambda_1 \cos^2 b$ verhältnismässig gross sind, und die, deren Argumente kleine α-Werte haben. Für die Glieder in $\Delta\eta$, deren Koeffizienten grösser als 1″ sind, ist im folgenden diese Grösse angeführt nebst den fraglichen L- und α-Werten, wobei alle Koeffizienten in Bogensekunden ausgedrückt sind. Von der Einwirkung gewisser sehr langperiodischer Glieder in der Mondlänge wird abgesehen.

TAB. 2.

Argument	α	L	$c^2k_3L:(\alpha^2-c^2k_3)$ $f=\frac{1}{2}$	$f=\frac{3}{4}$
l	+ 0,99155	+ 22541,0	+ 21,4	+ 10,7
$l-2D$	− 0,85885	− 4512,8	− 5,7	− 2,9
l'	+ 0,07480	− 669,3	− 133,7	− 60,8
$2l-2D$	+ 0,13270	− 236,9	− 13,2	− 6,4
$2F-2D$	+ 0,15764	− 63,6	− 2,5	− 1,2
$l-D$	+ 0,06635	+ 19,1	+ 5,0	+ 2,3
$2l-l'-2D$	+ 0,20750	− 10,4	− 1,0	
$-2l+2F$	+ 0,02494	+ 2,3	− 6,9	+ 6,9
$l-l'-D$	− 0,00845	− 1,2	+ 1,3	+ 1,4

Das Glied mit $-2l+2F$ als Argument ist interessant, weil es für $k_3 = 00002233$ unendlich wird, welcher Wert nicht weit von dem von Hayn gefundenen liegt. Für k_3-Werte von der von Puiseux angedeuteten grossen Grössenordnung wird der Nenner

$$\alpha^2 - c^2k_3$$

klein für verschiedene der in Tabelle 2 mit aufgenommenen Argumente. So wird der Koeffizient der jährlichen Ungleichheit unendlich für

$$k_3 = 0{,}001889$$

Bei dieser Integrationsmethode treten hier also kleine Divisoren auf und spielen eine analoge Rolle wie in der Planetentheorie, indem die Nenner der Koeffizienten für gewisse »kritische» Werte der Quantität k_3 verschwinden. Um die Störungen in diesem Falle zu ermitteln, muss man in derselben Weise wie in der Theorie der sekularen] Störungen der kleinen Planeten [1] höhere Potenzen der Störungsfunktion berücksichtigen. Durch Mitnehmen der vierten Potenz von η in die Störungsfunktion und durch Vernachlässigung der periodischen Glieder in $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos^2 b$ hat Charlier [2]

[1] Siehe Charlier: Die Mechanik d. Himmels, S. 424.
[2] Siehe Meddelande Nr 32.

die dabei auftretenden Koeffizienten näher in Betracht gezogen. Der Koeffizient zum fraglichen Argument wird eine diskontinuerliche Funktion der Grösse $\frac{\alpha}{\nu_3}$, indem er für einen Wert derselben in der Nähe von eins das Zeichen wechselt und verdoppelt wird. Wenn k_3 den oben angeführten Wert hat, für welchen die Periode der arbiträren Libration genau ein Jahr ausmacht, so würde es nach seinen Betrachtungen in η ein Glied der Grössenordnung

$$-12^0 \sin l'$$

geben.

Es könnte von Interesse sein, den numerischen Betrag der fraglichen Störungen zu untersuchen, wenn das Glied mit dem Argumente $-2l+2F$ »kritisch» wird, was für $f=0{,}65$ geschieht. Die Differentialgleichung für η hat nun die Form

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \nu_3{}^2 \sin\eta\cos\eta\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos{}^2b = \frac{d^2\lambda_1}{dt^2},$$

die wir mit ziemlich genauer Approximation durch

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \nu_3{}^2 \sin\eta\cos\eta = \frac{d^2\lambda_1}{dt} - \nu_3{}^2\lambda_1\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos{}^2b - 1\right]$$

ersetzen können.

Aus Charlier's oben erwähntem Aufsatz ist ersichtlich, dass man, wenn es auf der rechten Seite dieser Gleichung ein Glied giebt, für welches $\alpha^2=\nu_3{}^2$, in η ein Glied mit dem Koeffizienten

$$\left|\frac{3}{2L}\right.$$

erhalten würde. Für das hier zu betrachtende Glied ist $L=+2{,}''3$, oder im Radius ausgedrückt $+0{,}000011$. Der Koeffizient würde also den Betrag

$$+1^0{,}6$$

erzielen und für einen k_3-Wert in der Nähe des kritischen Punktes springt er von $-1^0{,}3$ zu $+2^0{,}6$ über. Von dieser mangelhaften Betrachtungsweise kann man indessen höchstens nur eine Annäherung der Lösung verlangen.

Nach Puiseux würde der Einfluss des fraglichen Arguments auf die Mondlibration unbedeutend sein.

24. Wird in der linken Seite der Gleichung (14) auf die Veränderungen im Radius Vektor Rücksicht genommen, so hat sie das Aussehen

$$\frac{d^2\Delta\eta}{dt^2} + \nu_3{}^2\left[1 + \Sigma K_i\cos(\alpha_i nt + h)\right]\Delta\eta = -\Sigma L_i\sin(\alpha_i nt + h_i) \tag{22}$$

Wird in $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos {}^2b$ nur das grösste Glied mitgenommen, so hat die von uns zu betrachtende Gleichung die bekannte LINDSTEDT-GYLDEN'sche Form. Wenn von der rechten Seite abgesehen wird, kann ihr Integral in der Form

$$\Delta\eta_i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varkappa_i \cos\left[w + i(\alpha nt + h)\right]$$

geschrieben werden, wo

$$w = \nu_3(1 - \rho)t + a_0$$

und die Grösse ρ genähert den Wert

$$\rho = \frac{K^2 {\nu_3}^2}{4(4{\nu_3}^2 - \alpha^2 n^2)}$$

hat, wenn nicht der Quotinent $\frac{\nu_3}{\alpha n}$ eine ganze Zahl ist. $\varkappa_0$ und a_0 representieren Integrationskonstante und die Verhältnisse zwischen den übrigen $\varkappa_i$ und $\varkappa_0$ sind kleine Grössen. Für das grösste Glied in $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos^2 b$, welches das Argument l hat, ist

$$K = + 0{,}164$$

und

$$\alpha = + 0{,}992$$

Wenn k_3 den wahrscheinlich allzu grossen Wert 0,00118 hat, wird

$$\rho = - 0{,}000024$$

welche Grösse eine sehr kleine Veränderung der Periode des ersten arbiträren Gliedes hervorrufen würde. Da die Einwirkung der periodischen Glieder in dem Koeffizienten zur $\Delta\eta$ in der Gleichung (22) auf die notwendige Libration sehr verschwindend ist, kann also ihre Vernachlässigung als berechtigt betrachtet werden.

25. Wenn wir uns zu den Gleichungen wenden, welche die Lage der Drehungsachse oder die Libration in Neigung und Knoten bestimmen, so haben wir die Koeffizienten der rechten Seiten der Gleichungen (16) zu ermitteln.

Aus (18) geht nun hervor, dass die Koeffizienten E_i, F_i, G_i, und H_i, kleine Werte haben, wenn nicht das fragliche Argument in der rechten Seite einen grossen Koeffizienten hat, oder einen α-Wert besitzt, der sich σ_1 oder σ_2 nähert, d. h. nahe eins oder Null ist.

Indem man von ganz unmerklichen Gliedern u, v, p' und q' absieht, braucht man also nur diejenigen Glieder in der rechten Seite der Gleichungen in Betracht zu ziehen, deren Koeffizienten gross sind oder eine Periode besitzen, die entweder nahezu einen Monat ausmacht oder auch sehr lang ist. Wie aus N:r 15 ersichtlich ist, haben die Koeffizienten N_i die Grösse f als Faktor und P_i und Q_i können in der Form geschrieben werden

$$P_i = P'_i + fP_i''$$
$$Q_i = Q'_i + fQ''$$

In der nachstehenden Tabelle sind die numerischen Beträge in Bogensekunden der Quantitäten M_i, $N_i : f$, P', P'', Q' und Q'' für alle Argumente mit einem Koeffizienten grösser als 100″ angegeben und ebenfalls für die Argumente, die vermöge der soeben erwähnten Eigenschaften Berücksichtigung verdienen, wenn sie grösser als 2″ sind. Bei ihrer Berechnung ist der Wert $\varepsilon_0 = 1^\circ 32' 6''$ angewandt, den ja HAYN für die Neigung des Mondäquators gefunden hat. Hierbei sind viele Koeffizienten mitgenommen, von denen man weiss, dass sie ohne Einfluss sind, die aber Anlass zu bemerkbaren Störungen geben würden, wenn die Trägheitsmomente solche Werte haben, dass ein Glied kritisch wird, indem Δ verschwindet.

TAB. 3.

Argument	M	$N:f$	P'	P''	Q'	Q''
F	−18428,1	+ 84,5	+18354,6	− 2,8	+ 31,5	+ 87,2
$l+F$	− 3267.2	− 1298,1	+ 3097,0	+ 149,9	− 152,9	− 1148.2
$-l+F$	− 662,0	+ 1320,4	+ 808,5	− 151,0	+ 152,3	+ 1170,5
$l+F+2D$	− 628,7	− 248,6	+ 588,4	+ 30,1	− 26,2	− 218,5
$F+2D$	− 514,1	− 196,0	+ 506,1	+ 20,5	− 27,0	− 175,5
$F-2D$	+ 371,1	+ 158,2	− 335,6	− 20.9	+ 13,5	+ 138,2
$2l+F$	− 348,2	− 204,8	+ 365,3	+ 17,4	− 34,0	− 187,4
$l+F-2D$	− 108,5	+ 300,8	+ 132,5	− 30,1	+ 34,0	+ 270,7
$l+F+2D$	− 101,6	− 57,4	+ 107,1	+ 4,6	− 8,5	− 52,9
$-2l+F$	+ 70,7	+ 98,0	+ 72,4	− 17,4	+ 0,8	+ 80 6
$l'+F$	+ 18,6	+ 38,9	− 14,6	− 4.4	+ 4 4	+ 34,3
$-2l+F+2D$	− 16,9	+ 8,9	+ 2,0	+ 1,5	+ 5,1	+ 10,4
$l'+F-2D$	− 11,8	+ 9,2	− 9,4	− 1,3		+ 8,0
$-l'+F$	− 10,0	− 38,4	+ 6,2	+ 4,4	− 4,4	− 34,0
$-l'+F-2D$	− 9,7		+ 9,6			
$3F-2D$	+ 5,9	+ 2.5	− 5,1	− 0,4		+ 2,1
$2l+F-2D$	+ 5,6	+ 38,2	− 20,2	− 1,5	+ 8,1	+ 36,7
$l+l'+F-2D$	− 4,6	+ 13,7	+ 5,9	− 1,4		+ 12.4
$F-D$	+ 4,0	− 7,3	− 2,3	+ 0,9	− 2,0	− 6,4
$-l-l'+F$	+ 3,7	− 8,4	− 3.5	+ 1,1		− 7,1
$2l+F-4D$	− 2,9	+ 4,2	− 2,2	− 0,7		+ 3,5
$-l+l'+F$	− 2,8	+ 9,6	+ 2,5	− 1,4		+ 8,3

In den Tabellen 4 und 5 sind dann die mittels der Formeln (18) berechneten Werte von E_i, F_i, G_i, und H_i gegeben mit den beiden Annahmen über die Konstante f. Nur diejenigen Argumente sind mitgenommen, für welche einer der Koeffizienten grösser als 0″,5 ist.

TAB. 4.

$f = \frac{1}{2}$

Argument	E	F	G	H
F	+ 44,49	+ 0,07	− 5559,6	+ 5537,4
$l+F$	+ 3,05	− 0,61	− 3,51	+ 1,08
$-l+F$	+ 79,39	+ 96,61	+ 1,59	− 1,20
$-l+F+2D$	+ 0,63	− 0,12	− 0,71	+ 0,24
$F-2D$	+ 0,81	− 0,17	+ 2 44	+ 2,71
$l+F-2D$	+ 1,39	+ 1,93	+ 0,36	− 0,27
$-2l+F$	+ 0,14	− 0,09	− 0,94	− 1,04

TAB. 5.

$f = \frac{3}{4}$

Argument	E	F	G	H
F	+ 44,49	+ 0,10	− 5572,3	+ 5550,2
$l + F$	+ 3,05	− 0,91	− 3,37	+ 0,74
$-l + F$	+ 69,50	+ 145,27	+ 1,93	− 1,01
$-l + F + 2D$	+ 0,63	− 0,19	− 0,70	+ 0,19
$F - 2D$	+ 0,81	− 0,26	+ 2,71	+ 2,94
$l + F - 2D$	+ 1,39	+ 2,90	+ 0,48	− 0,27
$-2l + F$	+ 0,18	− 0,14	+ 0,14	+ 0,03

26. In p' und q' sind alle Glieder klein mit Ausnahme der auf dem Argumente F beruhenden, so dass die Zentralachse im Raume ausser ihrer Präzessionsbewegung nur ziemlich kleinen periodischen Schwingungen unterliegt. In u und v bekommen die Glieder mit dem Winkelabstand des Mondperigäums als Argument verhältnismässig grosse Beträge. Wenn von allen übrigen Gliedern in u und v abgesehen wird, besteht die Bewegung der Zentralachse innerhalb des Körpers im Beschreiben einer Ellipse auf der Mondfläche. Sie wird in einer Periode gleich der Umlaufzeit des Perigäums in indirekter Richtung durchlaufen und ihre Exzentrizität ist von f abhängig. Wird der Koeffizient zum Glied mit dem Argumente F in u berücksichtigt, so kann man sagen, dass die Zentralachse eine lineare Schwingungsbewegung um eine Mittellage, die auf der eben erwähnten Ellipse liegt, in einem drakonitischen Monate senkrecht zur xz-Ebene ausführt mit einer Amplitüde von nahe zu 90″.

Aus diesen Koeffizienten bekommt man mittels der in (20) gegebenen Formeln die in der folgenden Tabelle gegebenen Koeffizienten in den Ausdrücken der Euler'schen Winkel ψ und θ. Die Koeffizienten in der ersten von diesen sind mit dem Sinus des Arguments zu multiplizieren, während θ aus einer Cosinusreihe besteht.

TAB. 6.

	$f = \frac{1}{2}$		$f = \frac{3}{4}$	
Argument	$\varepsilon_0(\psi + \Omega)$	ϑ	$\varepsilon_0(\psi + \Omega)$	ϑ
		+ 5526,2		+ 5539,0
l	+ 90,4	− 88,2	+ 109,8	− 107,4
$2F$	+ 11,1	− 11 1	+ 11,1	− 11,1
$-l + 2F$	− 8,5	+ 8,5	− 35,5	+ 35,5
$-2l + 2F$	− 0,9	+ 0,9	+ 0,2	− 0,2
$2F - 2D$	+ 3,1	− 3,1	+ 3,3	− 3,3
$l - 2D$	− 2,2	− 1,8	− 2,7	− 2,3
$l + 2F$	+ 0,6	− 0,6	+ 0,7	− 0,7
$l + 2F - 2D$			− 0,7	+ 0,7

Die auf Integrationskonstanten beruhenden Glieder in diesen beiden Grössen $\varepsilon_0(\psi + \Omega)$ und θ sind, wenn von gewissen sehr kleinen Quantitäten abgesehen wird,

$$\frac{-G_1}{\sqrt{Cn}} \sin(\sigma_1 nt + \gamma_1 - F) + \frac{E_2}{2\sqrt{Cn}}\left(1 + \sqrt{\frac{f}{1+e^2}}\right) \sin(\sigma_2 nt + \gamma_2 + F)$$
$$\frac{E_2}{2\sqrt{Cn}}\left(-1 + \sqrt{\frac{f}{1+e^2}}\right) \sin(\sigma_2 nt + \gamma_2 - F)$$

und

$$\frac{-G_1}{\sqrt{Cn}} \cos(\sigma_1 nt + \gamma_1 - F) - \frac{E_2}{2\sqrt{Cn}}\left(1 + \sqrt{\frac{f}{1+e^2}}\right) \cos(\sigma_2 nt + \gamma_2 + F)$$
$$+ \frac{E_2}{2\sqrt{Cn}}\left(-1 + \sqrt{\frac{f}{1+e^2}}\right) \cos(\sigma_2 nt + \gamma_2 - F) .$$

Der Betrag von ε_0 wird für $f = \frac{1}{2}$ gleich 5548,″5 und 5561,″3 für $f = \frac{3}{4}$.

Da der von uns benutzte k_1-Wert aus einem Werte der Inklination des Mondäquators gleich 5526″ und $f = \frac{1}{2}$ von Hayn berechnet ist, stimmt der konstante Teil von θ für diesen f-Wert mit seinen Berechnungen überein.

Der Ausdruck $-2\varkappa_1 \sin u_2$ bewirkt in der Libration in Longitud die kleinen Zusatzglieder $+1,''2 \sin l$ und $+1,''4 \sin l$ für f gleich bez. $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$, welche Glieder man also zu $\Delta\eta$ zu addieren hat, um diese Libration zu erhalten.

Werden die von Hayn angewandte Definition der Euler'schen Winkel und seine bei der Bestimmung der Störungen der Cassini'schen Gesetze benutzten Veränderlichen τ, ρ und σ mit in Betracht gezogen, so ergibt sich, dass

$$\tau = -\Delta\eta_1 + 2\varkappa_1 \sin u_2$$

und mit unseren Bezeichnungen ist

$$\theta = [\theta] + \rho \text{ und } \psi = -\Omega - \sigma \,^1.$$

In der Tabelle 7 sind so die Koeffizienten in der Libration in Länge nach meinen und Hayn's Rechnungen zusammengestellt im Falle $f = \frac{1}{2}$. Der von ihm benutzte k_1-Wert ist 0,0006256 und also sein k_3 gleich 0,0003128, während wir ja etwas grössere Werte dieser Quantitäten benutzt haben.

Tab. 7.

Argument	$\Delta\eta_1 - 2\varkappa_1 \sin u_2$	$-\tau$
l	+ 22,6	+ 22,3
$l - 2D$	− 5,7	− 5,6
l'	− 133,7	− 129,5
$2l - 2D$	− 13,2	− 13,7
$2F - 2D$	− 2,5	− 2,9
$l - D$	+ 5,0	+ 5,1
$2l - l' - 2D$	− 1,0	− 0,8
$-2l + 2F$	− 6,9	+ 20,2

[1] Selenogr. Koordinaten I S. 9.

Wie hieraus ersichtlich ist, lässt die Übereinstimmung wenig zu wünschen übrig mit Ausnahme des Gliedes mit dem Argument $-2l+2F$. Die Ursache hiervon scheint indessen ein Rechenfehler in Hayn's Arbeit zu sein [1], da der Koeffizient zum Glied mit dem Argument 2ω in dem von ihm mit $[]R^{-3}\cos^2 B$ bezeichneten Ausdruck fehlerhaft ist, und zwar numerisch ungefähr dreimal zu gross. Ausserdem habe ich entgegengesetzte Zeichen für ihn. Da Hayn von seinen oben angeführten Koeffizienten ausgeht, um die Lage seiner Mondflecke und die Rotationselemente zu ermitteln, dürften seine Resultate von dieser Fehlrechnung beeinflusst sein.

Zum Vergleich mit den in Tab. 6 für $f=\frac{1}{2}$ aufgeschriebenen Koeffizienten in der Libration in Breite gebe ich in der folgenden Tabelle auch die von Hayn gefundenen entsprechenden Grössen wieder.

TAB. 8.

Argument	$[\mathfrak{b}](\Psi+\Omega)$	ρ
l	+ 89,5	− 87,4
$2F$	+ 11,0	− 11,0
$-l+2F$	− 7,6	+ 7,6
$-2l+2F$	− 1,6	+ 1,6
$2F-2D$	+ 3,1	− 3,1
$l-2D$	− 1,9	− 1,9

In Anbetracht dessen, dass wir nicht ganz denselben k_1-Wert wie Hayn und etwas verschiedene Ausdrücke der Mondkoordinaten benutzt haben, ist die Übereinstimmung gut mit Ausnahme des Argumentes $-2l+2F$, dessen Koeffizienten auch hier von den von mir gefundenen etwas abweichen.

Wenn der α-Wert eines Argumentes gleich σ_1 oder σ_2 wird, ist unser Integrationsverfahren nicht mehr gültig, sondern es müssen höhere Glieder in der Störungsfunktion berücksichtigt werden. Unbedeutende Ungleichheiten in der Breite des Mondes können grosse Glieder in der Libration in Breite veranlassen, falls σ_1 oder σ_2 solche kritische Werte haben. So würden, wenn σ_1 gleich der mittleren Bewegung der Winkelgrösse F d. h. k_1 von der Grössenordnung

$$0{,}0027$$

wäre, die F entsprechenden Koeffizienten in p' und q' grosse Werte erzielen, was folglich auch mit der Neigung des Mondäquators der Fall sein würde.

Die bei der Untersuchung der kritischen Glieder in der Libration in Latitud zu betrachtenden Differentialgleichungen sind aber weit komplizierter als die bei der Libration in Longitud.

[1] Selenogr. Koordinaten I S. 22.

VI.

Herleitung der Bewegungsgleichungen der Drehung eines Körpes von veränderlicher Form mit Anwendung der Methode der Variation der Konstanten.

28. Die Theorie der Rotationsbewegung des Mondes ist bisher unter der Voraussetzung einer völligen Starrkeit des Mondkörpers durchgeführt worden. Wie in N:r 4 erwähnt wurde, hat Puiseux aus einigen von ihm gefundenen Gliedern in der physischen Libration den Schluss gezogen, es sei wahrscheinlich, dass der Mond nicht wie ein fester Körper rotiere, sondern dass die von der Erde und der Sonne verursachten Gezeitenkräfte eine ganz bedeutende Einwirkung auf die Rotationsgeschwindigkeit und die Richtung der Drehungsachse bewirken.

Bekanntlich ist die Bewegung der Drehachse der Erde unter Annahme eines elastischen Erdkörpers von verschiedenen Forschern untersucht worden. Die dabei auftretenden Zusatzglieder in der Präzession und Nutation der Erde sind aber sehr unbedeutend. Es scheint auch a priori nicht sehr wahrscheinlich, dass die Gezeitenkräfte, die auf den Mond ausgeübt werden, ausreichen, um die Puiseux'schen Glieder in der Libration su erklären, auch wenn die Existenz einer in dem Inneren des Mondes befindlichen Flüssigkeit angenommen wird. Das Problem verdient indessen untersucht zu werden und in dem Folgenden werde ich die charakteristische Funktion ableiten, zu welcher man geführt wird, wenn man die Drehungsbewegung eines veränderlichen Körpers nach der Methode der Variation der Konstanten untersuchen will, und zwar wenn die Veränderungen klein sind.

29. Wir kehren zu den in N:r 6 definierten Koordinatensystemen zurück und nennen die Trägheitsmomente um die Achsen weiterhin Ox, Oy und Oz, bez. A, B und C und die entsprechenden Trägheitsprodukte d, e und f.

Da die Form des Rotationskörpers jetzt kleinen periodischen Variationen unterworfen ist, sind die Hauptachsen nicht im Körper fest, sondern oszillieren um eine Mittellage. Wir lassen jetzt die im Körper festen Koordinatenachsen x, y und z mit der durchschnittlichen Lage der Hauptachsen zusammenfallen und werden diejenige Gestalt des Rotationskörpers, die dem Zustand entspricht, wenn die Hauptachsen ihre Mittellage einnehmen, als die ungestörte Gestalt auffassen. Im ungestörten Zustand sind also die Trägheitsmomente in Bezug auf diese Koordinat-

achsen Hauptträgheitsmomente und die Trägheitsprodukte gleich Null. Wir nennen diese Hauptträgheitsmomente des ungestörten Körpers A_0, B_0 und C_0 und schreiben

$$A = A_0 + a, \qquad B = B_0 + b, \qquad C = C_0 + c$$

wobei wir a, b, c, d, e und f als kleine periodische Funktionen der Zeit, welche aus der Theorie der Gezeitendeformationen zu berechnen sind, betrachten werden.

Zwischen a, b und c werden wir die Relation $a + b + c = 0$ annehmen.

Indem ω_1, ω_2 und ω_3 die Rotationskomponenten um die mit dem Körper fest verbundenen Achsen bezeichnen und

$$\alpha = \int \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) dm, \qquad \beta = \int \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) dm, \qquad \gamma = \int \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dm,$$

ist die lebendige Kraft des Körpers, wenn von der Bewegung des Schwerpunktes im Raume abgesehen wird,

$$T = \tfrac{1}{2} A\omega_1^2 + \tfrac{1}{2} B\omega_2^2 + \tfrac{1}{2} C\omega_3^2 - d\omega_2\omega_3 - e\omega_1\omega_3 - f\omega_1\omega_2 + \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3 .$$

Der von den Grössen α, β und γ herrührende Einfluss auf die lebendige Kraft erschwert die Behandlung des allgemeinen Problems ein wenig. Gyldén [1] hat bei einer Untersuchung des entsprechenden Problems für die Erde die Bewegung seiner beweglichen Koordinatenachsen so bestimmt, dass diese Grössen Null sind. Die von der Gezeitenwirkung herrührenden Beträge dieser Quantitäten sind aber sehr unbedeutend und wir wollen sie deshalb ganz vernachlässigen.

Wir werden nun weiterhin die Euler'schen Winkel als q-Koordinaten benutzen, um die Bewegungsgleichungen in kanonischer Form zu schreiben, und in Anbetracht der Relationen (1) erhalten wir für die entsprechenden p-Koordinaten die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
p_1 &= -e\omega_1 - d\omega_1 + C\omega_3 \\
p_2 &= -(A\cos\varphi + f\sin\varphi)\omega_1 + (B\sin\varphi + f\cos\varphi)\omega_2 + (e\cos\varphi - d\sin\varphi)\omega_3 \\
p_3 &= (A\sin\varphi\sin\theta + e\cos\theta - f\cos\varphi\sin\theta)\omega_1 + \\
&\quad + (B\cos\varphi\sin\theta + d\cos\theta - f\sin\varphi\sin\theta)\omega_2 \\
&\quad + (C\cos\theta + d\cos\varphi\sin\theta + e\sin\varphi\sin\theta)\omega_3 .
\end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen in Bezug auf ω_1, ω_2 und ω_3 aufgelöst und wird die lebendige Kraft in den Euler'schen Winkel und den p_i ausgedrückt, so nimmt sie die folgende Form an, wenn nur die erste Potenz der kleinen Grössen a, b, c, d, e und f mitgenommen wird

$$\begin{aligned}
T = {} & \frac{1}{2A}\left| (p_1\cos\theta + p_3)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - p_2\cos\varphi \right|^2 + \frac{1}{2B}\left| (p_1\cos\theta + p_3)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + p_2\sin\varphi \right|^2 + \frac{p_1^2}{2C} \\
& + \frac{f}{A_0B_0}\left[(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\theta} + p_2(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin\theta} - p_3^2\sin\varphi\cos\varphi \right| \\
& \frac{e}{A_0C_0}\left| p_1(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - p_1p_2\cos\varphi \right| \\
& + \frac{d}{B_0C_0}\left[p_1(p_1\cos\theta + p_3)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + p_1p_2\sin\varphi \right| .
\end{aligned}$$

[1] Recherches sur la rotation de la terre, Uppsala 1871.

Es sei nur ein störender Körper betrachtet und ξ, η und ζ seine Koordinaten in Bezug auf das mit dem Körper festverbundene Koordinatsystem. Dann ist das Potential der äusseren Kräfte bis auf Glieder zweiter Ordnung entwickelt

$$U = \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^3}\left[\frac{\xi^2}{3}(B+C-2A) + \frac{\eta^2}{3}(C+A-2B) + \frac{\zeta^2}{3}(A+B-2C) + 2d\eta\zeta + 2e\xi\zeta + 2f\xi\eta\right].$$

Oder wenn wir $k_1 = \frac{C_0 - A_0}{A_0}$ und $k_2 = \frac{C_0 - B_0}{B_0}$ einführen, und die Winkel, die der Radius Vektor r des störenden Körpers mit den x-, y- und z-Achsen bildet, mit bez. α β und γ bezeichnen.

$$(21)\quad U = \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^3}\Big[k_1 A_0 \cos^2\alpha + k_2 B_0 \cos^2\beta - a\,.\cos^2\alpha - b\,.\cos^2\beta - c\,.\cos^2\gamma + 2d\,.\cos\beta\cos\gamma + \\ + 2e\,.\cos\alpha\cos\gamma + 2f\,.\cos\alpha\cos\beta\Big].$$

Die Bewegungsgleichungen lauten nun wie vorher

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

wo H gleich $T - U$ ist.

30. Offenbar kann man auch hier dieselbe intermediäre Bewegungsform wie vorher benutzen, d. h. die Rotation eines festen kugelförmigen Körpers, und wir erhalten dann die in N:r 7 aufgeschriebenen Ausdrücke unserer zu bestimmenden Veränderlichen als Funktionen der Zeit und der sechs Integrationskonstanten α_i und u_i ($i = 1, 2, 3$). Nur hat man C gegen C_0 auszutauschen.

Indem die lebendige Kraft in dem als Veränderliche betrachteten α_i und u_i ausgedrückt wird, nimmt sie das Aussehen an

$$T = \frac{\alpha_2^2}{2C_0} + k_1\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C_0}\sin^2 u_1 + k_2\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C_0}\cos^2 u_1 - \\ - \frac{a}{2C_0^2}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\sin^2 u_1 - \frac{b}{2C_0^2}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\cos^2 u_1 - \frac{c}{2C_0^2}\alpha_1^2 - \\ - \frac{f}{C_0^2}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\sin u_1\cos u_1 + \frac{e}{C_0^2}\alpha_1\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}\sin u_1 - \frac{d}{C_0^2}\alpha_1\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}\cos u_1$$

wo in den wegen der Elastizität des Rotationskörpers auftretenden kleinen Zusatzgliedern die kleinen Quantitäten k_1 und k_2 vernachlässigt sind. Das Potential in diesen Variabeln auszudrücken ist auch eine leichte Aufgabe, da die Richtungcosinus in diesen Variabeln von Charlier und Zinner gegeben sind.

Wir wollen indessen, indem wir vor allem an die Mondrotation denken, die charakteristische Funktion in den Variabeln ξ_1, η_1, u, v, p und q entwickeln [1]. Werden nur die zwei ersten Potenzen von u, v, p und q berücksichtigt, so wird für die lebendige Kraft in diesen Veränderlichen der Ausdruck

[1] Vgl. S. 15.

$$(22)\quad T = \frac{1}{2C_0}(\xi_1^2 + k_1\xi_1 v^2 + k_2\xi_1 u^2) -$$

$$- \frac{1}{2C_0^2}[a\,\xi_1 v^2 + b\,\xi_1 u^2 + c\,\xi_1^2 - c\,\xi_1(u^2+v^2) + 2d\,\xi_1^{3/2}u + 2e\,\xi_1^{3/2}v - 2f\,\xi_1 uv]$$

erhalten.

Da die Potentialfunktion jetzt ausser den Quadraten auch von den zweigliedrigen Produkten der Richtungscosinus abhängig ist, müssen diese gebildet werden. Wenn nur Glieder bis sur zweiten Potenz von u, v, p und q mitgenommen werden, so ergeben sich für sie die folgenden Ausdrücke

$$(23)\quad \cos\beta\cos\gamma = \cos^2 b\left\{\sin^2\eta_1\frac{u}{\sqrt{\xi_1}} + \cos\eta_1\sin\eta_1\frac{v}{\sqrt{\xi_1}} - \sin\eta_1\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right\} +$$

$$+ \sin^2 b\left\{-\cos\eta_1\frac{p}{\sqrt{\xi_1}} + \sin\eta_1\frac{q}{\sqrt{\xi_1}} - \frac{u}{\sqrt{\xi_1}}\right\} +$$

$$+ \cos b\sin b\left\{-\cos^2\eta_1\frac{vp}{\xi_1} + \sin^2\eta_1\frac{vp+2uq}{\xi_1} + \cos\eta_1\sin\eta_1\frac{2(vq-up)}{\xi_1} +\right.$$

$$\left. + \cos\eta_1\frac{3(-uv+pq)}{2\xi_1} + \sin\eta_1\left(1 - \frac{4u^2+v^2+p^2+4q^2}{2\xi_1}\right)\frac{2}{+}\frac{uq}{\xi_1}\right\};$$

$$(24)\quad \cos\alpha\cos\gamma = \cos^2 b\left\{\cos^2\eta_1\frac{v}{\sqrt{\xi_1}} + \cos\eta_1\sin\eta_1\frac{u}{\sqrt{\xi_1}} - \cos\eta_1\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right\} +$$

$$+ \sin^2 b\left\{\cos\eta_1\frac{q}{\sqrt{\xi_1}} + \sin\eta_1\frac{p}{\sqrt{\xi_1}} - \frac{v}{\sqrt{\xi_1}}\right\} +$$

$$+ \cos b\sin b\left\{\cos^2\eta_1\frac{2vq-up}{\xi_1} + \sin^2\eta_1\frac{up}{\xi_1} + \cos\eta_1\sin\eta_1\frac{2(uq+vp)}{\xi_1} +\right.$$

$$\left. + \cos\eta_1\left(1 - \frac{u^2+4v^2+p^2+4q^2}{2\xi_1}\right) - \sin\eta_1\frac{3(uv+pq)}{2\xi_1} + \frac{2vq}{\xi_1}\right\};$$

$$(25)\quad \cos\alpha\cos\beta = \cos^2 b\left\{\cos^2\eta_1\frac{-uv+pq}{2\xi_1} - \sin^2\eta_1\frac{uv+pq}{2\xi_1} + \cos\eta_1\sin\eta_1\left(1 -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{u^2+v^2+2q^2}{2\xi_1}\right) + \cos\eta_1\frac{uq}{\xi_1} + \sin\eta_1\frac{vq}{\xi_1}\right\} +$$

$$+ \sin^2 b\left\{-\cos^2\eta_1\frac{pq}{\xi_1} + \sin^2\eta_1\frac{pq}{\xi_1} + \cos\eta_1\sin\eta_1\frac{-p^2+q^2}{\xi_1} +\right.$$

$$\left. + \cos\eta_1\frac{-uq+vp}{\xi_1} - \sin\eta_1\frac{up+vq}{\xi_1} + \frac{uv}{\xi_1}\right\} +$$

$$+ \cos b\sin b\left\{-\cos^2\eta_1\frac{p}{\sqrt{\xi_1}} + \sin^2\eta_1\frac{p}{\sqrt{\xi_1}} + \cos\eta_1\sin\eta_1\frac{2q}{\sqrt{\xi_1}} - \cos\eta_1\frac{u}{\sqrt{\xi_1}} -\right.$$

$$\left. - \sin\eta_1\frac{v}{\sqrt{\xi_1}}\right\}.$$

Die charakteristische Funktion hat die Form

$$H = T - U + [\tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) - \xi_1]\frac{d\lambda}{dt}$$

wo T aus (22) gegeben ist, und in dem Ausdruck (21) für U hat man die Quadrate und die Produkte der Richtungscosinus einzuführen. Jene sind, wie erwähnt, von Charlier und Zinner [1] entwickelt und für diese haben wir die in (23), (24) und (25) aufgeschriebenen Ausdrücke.

Wird die Einwirkung von mehr als einem störenden Körper berücksichtigt, so wird die Potentialfunktion eine Summe von Ausdrücken der Form (21). Dabei muss man den Umstand beachten, dass die Variabeln p und q von der Länge eines der störenden Körper abhängig sind, so dass diese Entwickelungen der Quadrate und Produkte der Richtungscosinus dabei nicht ohne weiteres benutzt werden können.

Die Bewegungsgleichungen der Drehung des veränderlichen Körpers sind wie vorher

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_1}, \qquad \frac{d\eta_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_1}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{dq}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Zuletzt ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor C. V. L. Charlier, für das lebhafte Interesse, das er meinen Studien stets gewidmet hat, meiner wärmsten Dank auszusprechen. Insbesondere muss ich ihm für die grosse Hilfe herzlich danken, die er dieser Arbeit dadurch angedeihen ließ, daß er mir einige Vorlesungsmanuskripte über diesen Gegenstand zur Verfügung stellte.

Auch meinem Freunde Mag. Phil. S. Nydell, der mich bei einigen der numerischen Rechnungen unterstützt hat, habe ich meinen besten Dank auszusprechen.

[1] Meddelande N:r 33.